

**Determinação experimental expedita do índice de energia
de Bond (Wi) para a moagem em moinho de bolas**

Gonçalo Maria de Almeida Fontes da Silva Viegas

Dissertação para obtenção do grau de mestre em

Engenharia Geológica e de Minas

Orientadores:

Professor Fernando de Oliveira Durão

Professor Carlos Alberto Alonso da Costa Guimarães

Júri

Presidente: Professora Maria Matilde Mourão de Oliveira Carvalho Horta Costa e
Silva

Orientador: Professor Fernando de Oliveira Durão

Vogal: Professor Gustavo André Paneiro

Setembro de 2020

Declaração

Declaro que o presente documento é um trabalho original da minha autoria e que cumpre todos os requisitos do Código de Conduta e Boas Práticas da Universidade de Lisboa.

Agradecimentos

Esta tese só foi possível devido aos contributos de algumas pessoas, que directa ou indirectamente me ajudaram neste projecto e às quais quero aqui expressar a minha gratidão pelo apoio ao longo desta jornada.

Em primeiro lugar quero agradecer aos meus orientadores, que me ajudaram em todas as etapas deste difícil processo, ao Professor Fernando Durão e ao Professor Carlos Guimarães que me disponibilizaram parte do seu tempo livre e foram indispensáveis à realização desta tese. Um muito obrigado aos dois pelo tempo e paciência demonstrada comigo.

Quero também deixar um agradecimento ao Sr. Fernandes, técnico do laboratório de Minas, que nos cumprimenta sempre com um sorriso, oferece ajuda, conselhos e faz-nos sentir em casa no laboratório onde ele trabalha.

Ao Instituto Superior Técnico, por disponibilizar tantos recursos aos alunos para que estes possam elaborar as suas teses.

A todos os meus colegas do IST, que são como uma família, porque estiveram lá para me apoiar e motivar e foram muito importantes para que este trabalho se realizasse.

Como não podia deixar de ser, um grande obrigado à minha família, aos meus Pais pelas inúmeras oportunidades que me possibilitaram. A conclusão deste curso é da inteira responsabilidade deles, que nunca desistiram e sempre me empurraram mais além do que eu achava que conseguia. Aos meus irmãos que em simples gestos e palavras me animam e me ajudam sem saberem, pela preocupação demonstrada e o amor fraterno que partilhamos.

Por último, mas não menos importante, um agradecimento muito especial ao meu núcleo duro de amigos, com os quais fiz grande parte do trabalho escrito e que foram incansáveis a ajudar-me.

Resumo

A moagem é das etapas mais importantes em diversas indústrias, tais como a indústria química, mineira e na produção de cimento. A energia consumida neste processo é enorme, o que motivou um estudo intensivo nesta área. Uma das metodologias empíricas mais utilizada pelos engenheiros no dimensionamento de equipamento de moagem, particularmente a realizada em moinhos de bolas, foi proposta por Fred C. Bond na década de 1950 e é genericamente conhecida por método de Bond. Este assenta na aplicação da chamada Terceira Lei da Cominuição (ou Lei de Bond) e no conhecimento do índice de energia, (W_i), o qual mede a aptidão à fragmentação de um determinado sistema moinho/material a moer.

A determinação experimental do W_i é feita através de um procedimento laboratorial normalizado bastante extenso e laborioso, iterativo e cujo sucesso está correlacionado com o rigor da sua execução.

Propõe-se nesta dissertação um procedimento alternativo ao método de Bond, mais expedito e robusto, recorrendo a uma simulação numérica computacional do procedimento normalizado de Bond, para a determinação do W_i na moagem em moinho de bolas. A simulação é baseada num modelo matemático calibrado da cinética da moagem descontínua (*batch*) laboratorial em moinho de bolas e num modelo elementar da crivagem laboratorial, considerada perfeita e ideal. O procedimento aqui proposto é comparado com um caso de estudo e com os resultados de uma metodologia, igualmente expedita, proposta por Kapur (1970).

Palavras-Chave: Índice de energia de Bond, Método de Bond; Moinho de Bolas, Moagem, Simulação

Abstract

Dry grinding is one of the most important stages in several industries, such as chemical, mining and cement production, the energy requirements are high, this has motivated intensive research on this subject. One of the most widely employed empirical methodologies in the design of grinding equipment by engineers, particularly used in ball mills, was proposed by Fred C. Bond in the 1950's and is generically known as Bond method. This method is based on the application of the so-called Third Comminution Law (or Bond Law) and on the knowledge of one parameter, known as Work Index (Wi), which measures the ability to grind of a given mill/ material system.

The experimental determination of the Wi involves performing a standardized laboratory procedure that is very laborious, iterative and highly sensitive to the rigor of its execution

It is proposed in this dissertation an alternative procedure, which is more expeditious and robust, using computational numerical simulation of the normalized Bond procedure, for the determination of the Wi for ball milling. The simulation is based on a calibrated kinetics mathematical model of laboratory batch ball milling and on an elementary model of laboratory sieving, considered perfect and ideal. The alternative procedure is compared with a case study and with the results of an equally expedite methodology proposed by Kapur (1970).

Keywords: Bond Work Index; Ball Milling; Simulation

Índice

Declaração.....	iii
Agradecimentos.....	iv
Resumo	v
Abstract.....	vi
Índice	vii
Índice de Tabelas	ix
Índice de Figuras	x
Lista de abreviaturas e símbolos.....	xii
Capítulo 1 - Introdução	14
Capítulo 2 - Estado de Arte	16
2.1 Modelo Cinético da moagem laboratorial <i>batch</i> ou por lotes	20
2.2 Método de Bond	22
2.2.1 Fórmulas de dimensionamento	25
2.3 Método Simplificado de Kapur.....	26
2.3.1 Um algoritmo para o ensaio de Bond	26
2.3.2 Relação entre Bond e moagens por lotes (<i>batch</i>)	28
2.3.3 Estimação da moabilidade de Bond	30
2.3.4 Relação entre G_2 e o índice de energia de Bond.....	31
Capítulo 3 – Procedimento Experimental.....	32
3.1 Equipamentos.....	32
3.2 Material Geológico.....	32
3.3 Metodologia do trabalho experimental	34
3.3.1 Preparação das amostras a ensaiar	34
3.3.2 Caracterização Granulométrica.....	36
3.3.2.1 Caracterização granulométrica da amostra a ensaiar.....	38
3.3.3 Ensaio Cinético.....	40
3.3.4 Ensaio de Bond	43
Capítulo 4 – Modelação, Resultados e Discussão dos mesmos	47
4.1 Seleção do Melhor Ajuste com recurso ao Excel	49

4.2 Análise dos Resíduos	52
4.2.1 Teste do Qui-Quadrado	53
4.2.2 Teste de Kolmogorov-Smirnov	55
4.3 Implementação e Validação da simulação numérica do procedimento experimental de Bond Standard.....	57
4.4 Análise de Sensibilidade.....	60
4.5 Validação da metodologia, por comparação dos resultados com metodologia alternativa	62
Capítulo 5 – Conclusões e Trabalhos Futuros	63
Bibliografia:	64

Índice de Tabelas

Tabela 1 - Tabela dos factores de eficiência (EF) e o seu respectivo cálculo	24
Tabela 2 - Factor de ineficiência vs percentagem de produto infra malha do crivo teste.....	25
Tabela 3 – Massa da amostras preparadas, em gramas.....	36
Tabela 4 – Crivos utilizados, fracções granulométricas resultantes e tipo de crivagem usada.....	37
Tabela 5 - Massa das amostras antes e depois de análise granulométrica	39
Tabela 6 - Resultados das análises granulométricas da amostra inicial e valor médio.....	40
Tabela 7 – Especificações do moinho de Denver	41
Tabela 8 – Composição da carga de bolas utilizada no moinho de Denver	42
Tabela 9 - Distribuição granulométrica dos PMB's	43
Tabela 10 - Descrição ciclo a ciclo do Ensaio de Bond	45
Tabela 11 - Simbologia das figuras 12 e 13.....	49
Tabela 12 - Método de Kapur aplicado aos dados simulados	59
Tabela 13 - Resultados do teste experimental e simulado com o respectivo intervalo de confiança...	61
Tabela 14 - Comparação do método em análise com o alternativo.....	62

Índice de Figuras

Figura 1 - Mapa da região de Portugal onde podemos encontrar a rocha usada neste trabalho (Calcário de Lioz), fonte: LNEG - Laboratório Nacional de Engenharia Geológica	33
Figura 2 - À esquerda um bloco de Calcário de Lioz usado nos ensaios laboratoriais, à direita o mesmo bloco após fragmentação com recuso a marreta, num recipiente com 50 cm de comprimento e 20 cm de largura.....	33
Figura 3 – Equipamento do laboratório do IST	34
Figura 4 - Preparação esquemática da amostra inicial ao ensaio de Bond.....	35
Figura 5 - Processo de crivagem manual do PMR	35
Figura 6 - Pilha de crivos sobre um agitador magnético (esquerda), e crivos virados sobre gamelas para recuperação do material supra crivo à (direita).....	38
Figura 7 – Análise granulométrica de quatro amostras do material a ensaiar, PMR -3550 μm ou AMB, com o calibre em escala logarítmica	39
Figura 8 - Carga de bolas usada (esquerda) e um moinho de Denver aberto (direita)	41
Figura 9 - Analise Granulométrica dos produtos do moinho de bolas do ensaio cinético, com o calibre em escala logarítmica.....	42
Figura 10 - Resumo esquemático da metodologia empírica de Bond	44
Figura 11 – Análise granulometria dos produtos do ensaio de Bond, com o calibre em escala logarítmica	46
Figura 12 - Apresentação esquemática dos ciclos encadeados de Bond	48
Figura 13 – Algoritmo de simulação numérica da metodologia empírica de Bond.....	48
Figura 14 - Representação gráfica dos resultados experimentais e dos simulados pelo modelo AKL SSR 4	51
Figura 15 - Representação gráfica dos resultados experimentais e dos simulados pelo modelo AKL SSR 3	51
Figura 16 - Representação gráfica dos resultados experimentais e dos simulados pelo modelo RPK SSR 3	52
Figura 17 – Resultados da página ‘Residues I’ para o AKL SSR 3. À esquerda a tabela dos resíduos e à direita a tabela de frequências dos erros	53
Figura 18 - Histograma da frequência dos erros para o AKL SSR 3	54
Figura 19 - Resultados da página ‘Residues I’ para o RPK SSR 3. À esquerda a tabela dos resíduos e à direita a tabela de frequências dos erros	54
Figura 20 - Histograma da frequência dos erros para o RPK SSR 3.....	55

Figura 21 - Probabilidade cumulativa do erro vs erro de estimação.....	56
Figura 22 - Fórmulas para o cálculo do valor crítico para o teste estatístico de Kolmogorov-Smirnov (fonte: www.estgv.ipv.pt/PaginasPessoais/lucas/material/Tabela_K-S.pdf).....	56
Figura 23 - Página 'Experimental Bond Tests' do Excel, já com os valores introduzidos	57
Figura 24 - Operação de minimização do resíduo (célula N21) do cálculo do WI pelo método de Kapur, por alteração do valor de G2 (célula N20)	58
Figura 25 - Primeira parte da tabela de simulação de Bond com dados iniciais na parte superior da figura.....	58
Figura 26 - Segunda parte da tabela de simulação de Bond, com o histórico de cada ciclo e o WI simulado	59

Lista de abreviaturas e símbolos

Simbologia	Significado	Unidades
a_T, a_c	parâmetros do modelo	
AG	Amostra para análise granulométrica da alimentação	g
AKL	Sigla para referenciar o modelo de Austin, Klimpel e Luckie	
AMB	Alimentação moinho de bolas	g
b_{ij}	Material na fracção granulométrica i , proveniente da fracção granulométrica j	g
B_{ij}	Somatório das fracções granulométricas inferiores ao limite superior da fracção i resultante da fragmentação primária do material de granulometria j	g
AMB	Alimentação do moinho de bolas	g
PMB	Produto do moinho de bolas	g
C	Constante determinada laboratorialmente	
cc	carga circulante	g
D_m	Diâmetro do moinho (cm)	cm
D_{max}	desvio na percentagem cumulativa	
E	Energia específica de moagem	
EF_i	Factor de Eficiência i	
exp_i	Expoente i	
$f(x)$	Função da dimensão característica das partículas	
G'	Moabilidade das partículas recicladas	g/rev
g_i	Velocidade da moagem no ciclo i	g/s
G_i	Moabilidade do ciclo i	
G_{bp} ou G_B	Índice de moabilidade calculado, expresso em unidades de Bond (g/rev)	g/rev
I	Infra crivo total do produto do moinho de bolas	g
IC	intervalo de confiança	
IST	Instituto Superior Técnico	
K	índice de eficiência da moagem	J/m ²
L_m	Cumprimento do moinho	cm
M_A	Massa da amostra	g
M_B	Massa de bolas	g
M_i	Massa da alimentação do moinho de bolas no ciclo i ($i=1, \dots, n$)	g
MOG	Calibre da malha do crivo teste	μm
mp	Potência do moinho (kW)	kW
n	Número de classes/intervalos	
$P(x)$	Função de mostra as distribuições granulométricas cumulativas simuladas em função do tempo de permanência no moinho	μm
$P_i(t)$	Peso da fracção i na carga do moinho no tempo t	g
P_c	Tamanho da malha do crivo teste	μm
$PM(x)$	Função de mostra as distribuições granulométricas cumulativas obtidas em laboratório em função do tempo de permanência no moinho	μm
PMB	Produto do moinho de bolas	g
PMR	Produto do moinho de rolos	g
Q	Caudal	t/h

r	fracção da alimentação original retida no crivo teste	
R_{80}	Razão de redução de calibre	
R_i	Massa de produto supra crivo teste do ciclo de moagem i	g
R_n^k	Peso das partículas crivo teste da alimentação do ciclo k e que se mantêm supra crivo após o ciclo n	g
RPK	Sigla para referenciar o modelo de R. P. King	
S_i	Taxa de fragmentação específica da fracção i	
SARR	Soma dos resíduos relativos absolutos (Sum of Absolute Relative Residues)	
SSR	Soma do quadrado dos resíduos (Square Sum Residues)	
t	tempo	s
t_i	tempo de moagem do ciclo i	s
t_{10}	índice granulométrico de 'finura' definido como a percentagem da descendência menor que um décimo da média inicial de tamanho das partículas	μm
U_i	Massa infra crivo teste produzida no ciclo i	g
U_b	Índice de moabilidade calculado	g/rev
V_A	Volume da amostra	cm^3
V_{rot}	velocidade de rotação do moinho	rpm
W_i	Índice de Energia de Bond	kWh/t
W_{cor}	Índice de Energia de Bond corrigido	kWh/t
W_{exp}	Índice de Energia de Bond experimental	kWh/t
W_{op}	Índice de Energia de Bond operacional	kWh/t
WSSR	Soma ponderada dos quadrados dos resíduos (Weighted Sum of Squared Residues)	
x	calibre das partículas ou calibre médio da amostra	μm
X_i	Limite superior do intervalo granulométrico indexado por i	μm
α	nível de significância	
$\delta, \varphi, \gamma, \beta$	Parâmetros do modelo que dependem das propriedades do material	
λ^2	Estatística de teste, do teste Qui-quadrado	
λ_{crit}^2	Menor valor da região de rejeição da hipótese	
Γ	Energia média de superfície por unidade de área	J/t
φ'	distribuição granulométrica da carga circulante	
$\varphi(t)$	função dos parâmetros de selecção, fragmentação e da distribuição granulométrica da alimentação inicial em função do tempo	
φ_{80}^A	módulo de calibre 80% passante da alimentação (μm)	μm
φ_{80}^P	módulo de calibre 80% passante do produto do moinho (μm)	μm

Capítulo 1 - Introdução

A moagem é das etapas mais importantes em diversas indústrias, tais como a indústria química, mineira e na produção de cimento pois os requisitos energéticos são altíssimos. Havendo vários fabricantes e diversos tipos de moinhos, a seleção do melhor entre todas as alternativas é um difícil problema (Deniz et al., 2005).

No passado, os moinhos de bolas eram estudados usando uma filosofia da 'caixa negra', onde as interações e interrelações dos seus elementos eram negligenciadas e o produto do moinho era estudado como função da alimentação. Tais abordagens levaram ao desenvolvimento das leis da cominuição de Kick, Rittinger e Bond (Tarasiewicz & Radziszewski, 1990).

No desenho de circuitos de moagem, o método empírico de Bond é amplamente usado para determinar as características do moinho, como a potência e as dimensões, a utilizar para um dado material. Este método é complexo e moroso, além disso, é altamente sensível a erros experimentais, levando a que muitos investigadores propusessem métodos alternativos ao método de Bond tais como os métodos de Berry & Bruce (1966), Smith & Lee (1968), Kapur (1970) e Karra (1981) (Deniz, 2004; Deniz & Ozdag, 2003; Jauregui, 1982).

Os métodos alternativos ao de Bond baseiam-se em modelos cinéticos e matriciais e têm sido usados em laboratório e nas áreas industriais. O modelo cinético é uma abordagem alternativa, que considera a cominuição como um processo contínuo no qual a taxa de fragmentação das partículas de um certo calibre é proporcional à massa total das partículas desse calibre presentes (Umucu & Deniz, 2014).

Nos últimos anos a análise da redução de calibre em moinhos de bolas, usando os conceitos de taxa de fragmentação específica e de distribuição de fragmentos primários, tem sido alvo de muita atenção. Alguns autores (Austin et al., 1984; Austin & Bhatia, 1972) analisaram as vantagens desta abordagem, e do aumento de escala de moinhos, de laboratorial para industrial, que também tem vindo a ser discutido num conjunto de artigos (Austin & Brame, 1983; Herbst & Fuerstenau, 1980; Narayanan & Whiten, 1988).

Determinar o índice de energia (W_i) através do método *standard* de Bond, é um processo laboratorial exigente que requer cuidadosos ciclos encadeados de moagem e de crivagem. Contudo, estes são procedimentos demorados e susceptíveis a erros. Considerando as dificuldades associadas à determinação do W_i através do método *standard* de Bond, vários autores desenvolveram métodos alternativos mais rápidos e simples (Ahmadi & Shahsavari, 2009; Aksani & Sönmez, 2000; Armstrong, 1986; Deniz & Ozdag, 2003; Horst & Bassarear, 1976; Ipek et al., 2005; Karra, 1981; Magdalinović, 1989; Nematollahi, 1994; Pickering, 1913; Smith & Lee, 1968; Yalcin et al., 2004; Yap et al., 1982), mas até hoje ainda nenhum desses novos métodos se demonstrou capaz de substituir na totalidade o método *standard* de Bond, que continua a ser o método mais usado e mais fiável (Gharehgheshlagh, 2016).

Por estes motivos, nesta dissertação é proposta e avaliada uma metodologia de simulação computacional do método *standard* de Bond, reduzindo a componente laboratorial ao mínimo e substituindo-a por simulação numérica do procedimento experimental. Deste modo é reduzido o potencial de erros experimentais e, através de análise de sensibilidade, é possível estimar um intervalo de confiança para o valor do W_i . Paralelamente também estudamos a influência na modelação do número de ensaios cinéticos utilizados, relacionando os tempos usados com os tempos do ensaio de Bond, e testamos dois modelos matemáticos para esta simulação procurando o que providência a melhor modelação ou a que maior fundamento estatístico.

A presente dissertação encontra-se estruturada da seguinte forma: inicialmente, no Capítulo 2 é analisado o estado da arte relativo aos conceitos e métodos centrais do presente estudo, seguindo-se, no Capítulo 3, a descrição dos parâmetros utilizados no método alternativo em análise (simulação), o procedimento experimental necessário à obtenção desses mesmos parâmetros bem como o ensaio de validação dos resultados do método proposto. No Capítulo 4 é apresentado o método subjacente ao procedimento proposto, simulado. Por fim, são apresentados os resultados assim como as conclusões do trabalho desenvolvido, e ainda possíveis linhas de investigação futuras resultantes da presente dissertação.

Capítulo 2 - Estado de Arte

Na exploração de recursos geológicos, na maioria das vezes, é necessário separar o mineral de interesse da ganga. A evolução tecnológica viabilizou o processamento de minérios com cada vez menor teor de mineral de interesse, aumentando assim consideravelmente as reservas existentes (Hartman, 2002).

Até à invenção dos primeiros moinhos, em meados do século 19, os minérios eram fragmentados com recurso a marreta (Michaud, 2015). Hoje em dia já são utilizadas máquinas, como britadores, granuladores e moinhos para reduzir as rochas a pó. Destas máquinas, uma das mais versáteis e mais utilizada é o moinho de bolas, no entanto, apesar do seu relativo baixo custo de instalação e de consumíveis, continua a ser muito dispendiosa, levando a que a sua escolha seja bastante cuidadosa (Pryor, 1965). Tendo em consideração os elevados custos de aquisição e operação destas máquinas, nasceu a necessidade de otimizar as mesmas às características particulares de cada operação mineira e daqui nasceram as tentativas de previsão do dimensionamento óptimo para cada caso.

Em teoria, é possível determinar as dimensões óptimas de um moinho de bolas, para um dado minério e uma dada capacidade de produção, através de ensaios laboratoriais com recurso a versões reduzidas dos moinhos e conhecendo as devidas razões de escala (Rexnord Inc. Process Machinery Division, 1976). Na prática, é difícil obter as características da moagem industrial (composição da carga de bolas, tempo de residência, acção dos classificadores, entre outros) num laboratório, e os ensaios não são simples de realizar. Para obter resultados experimentais fiáveis é necessário utilizar instalações piloto, e operações à escala piloto são mais dispendiosas que a escala laboratorial. Todos estes factores motivaram o desenvolvimento de métodos mais expeditos para o dimensionamento de moinhos.

Os métodos actuais de dimensionamento de moinhos de bolas que utilizam resultados de ensaios laboratoriais, baseiam-se geralmente no uso de relações matemáticas empíricas ou factores derivados de experiência acumulada. Cada fabricante desenvolveu um método expedito para aconselhar os seus clientes, e é deveras complicado validar estimativas pois os resultados entre os diversos métodos não são correlacionáveis. Contudo, algumas destas relações empíricas são compatíveis com um pensamento lógico de moagem descontínua usando balanços de massas e distribuições granulométricas. (Austin et al., 1984)

Através da análise de processos de cominuição desenvolveram-se leis empíricas sobre a cominuição de rochas. As principais são conhecidas como as leis da cominuição de Kick, Rittinger e Bond (Austin et al., 1984).

Estas leis baseiam-se na observação de distintos padrões que são frequentemente detectados nos resultados de moagens descontínuas em moinho de bolas. A detecção de tais padrões motivou Kick, 1883, a tentar relacionar o grau de redução de calibre com a energia fornecida ao moinho. Usando modelos bastante simples para relacionar a energia de tensão-deformação (*stress and strain*) com o tamanho das partículas e das fracturas, derivou uma expressão simplista onde a energia usada no

processo de moagem é igual à totalidade da energia fornecida ao moinho. Este método não representa a realidade pois assume uma eficiência de 100%, e desconsidera perdas energéticas comuns (sob a forma de calor, ruído, etc.). Em adição, é considerado o tamanho médio das partículas, em oposição ao normalmente utilizado módulo de calibre 80% passante, dado que as partículas não se fragmentam gerando um único calibre. Ignorando as bases científicas dúbias da lei de Kick, esta pode ser usada na forma empírica de pseudo lei de Kick (Austin et al., 1984):

$$E = \frac{m_p \times t}{PMB} = C \times \log \frac{\phi_{80}^A}{\phi_{80}^P} \quad (2.1)$$

onde E representa a energia específica de moagem, a qual pode ser calculada em função do grau de redução de calibre se a constante C for determinada laboratorialmente, m_p é a potência do moinho, t é o tempo de moagem, PMB é a massa do produto moído, ϕ_{80}^A e ϕ_{80}^P são os módulos de calibre a 80% da alimentação e produto, respectivamente.

Austin et al., (1984), demonstram que a lei de Kick não descreve satisfatoriamente o padrão de resultados, apesar de alguns autores, (Andreasen & Jenson, 1955; Hukki, 1961) afirmarem que por vezes se ajusta bem aos resultados de moagens grosseiras.

A lei de Rittinger (Rittinger, 1867) afirma que a energia necessária para a fragmentação está relacionada com a superfície produzida por unidades de massa:

$$\text{Energia Específica} = (\gamma) \times \left(\frac{\text{área da nova superfície}}{\text{superfície}} - \frac{\text{área de superfície existente}}{\text{superfície}} \right) \quad (2.2)$$

onde γ representa a energia média de superfície por unidade de área.

Uma fractura através de um plano de área unitária produz duas áreas unitárias de superfície nova e requer 2γ de energia para quebrar as forças de ligação existentes antes da fragmentação. Esta lei tem um interesse considerável pois assemelha-se a uma lei físico-química, no entanto, a declaração é ilusória. Deveria formular que a energia mínima para a fragmentação é equivalente ao produto de γ pela área produzida, visto que a energia fornecida tem de ser suficiente para quebrar as ligações existentes pré-fragmentação. Como a potência do moinho é um dos parâmetros de desenho, é necessário encontrar uma relação entre a energia fornecida ao moinho e a energia de superfície do material (Austin, 1973; Rittinger, 1867).

Austin & Klimpel (1964) debateram o processo de fragmentação do ponto de vista da utilização de energia para a criação de novas superfícies. Em qualquer processo de fragmentação as tensões aplicadas ao sólido têm de ser suficientes para iniciar a propagação das fracturas existentes. Criar este estado de tensões requer energias maiores ou iguais às tensões armazenadas no sólido. O sólido fractura a tensões baixas ou altas dependendo de um conjunto de factores além do valor da energia específica de superfície do material. Grande parte da energia acumulada na rocha pré-fragmentação é libertada sob a forma de calor, durante a fragmentação, proveniente da contracção e expansão das

partes separadas. Em todo o caso, a fracção da energia convertida em energia de superfície é extremamente pequena.

Numa série clássica de experiências, Rose (1967) demonstrou que a energia de superfície é apenas uma pequena fracção da energia fornecida ao moinho. Dentro dos limites do erro experimental, a maior parte da energia é transformada em calor, ruído ou energia de mudança de fase, não havendo qualquer evidência de que a energia fornecida seja um múltiplo de γ , torna-se bastante complicado justificar que apenas uma fracção muito pequena da energia fornecida controle todo o processo de fragmentação. A fracção da energia fornecida que se transforma em energia de superfície varia largamente dependendo da estrutura do material, bem como do método de aplicação de tensão. Segundo Rose, (1967) na prática esta lei empírica é:

$$E = K \times \left(\begin{array}{l} \text{nova superfície produzida} \\ \text{por unidade de massa moída} \end{array} \right) \quad (2.3)$$

onde E representa a energia específica de moagem e K, apesar de totalmente empírico, representa o índice de eficiência da moagem. Sendo que um valor pequeno de K traduz uma pequena necessidade energética por unidade de superfície produzida, o que é mais eficiente que um valor alto. Um material mais difícil de moer terá um valor de K superior ao de um material mais fácil de moer.

Esta lei é frequentemente chamada de pseudo-Rittinger quando representada na forma:

$$E = C \times \left(\frac{1}{\phi_{80}^P} - \frac{1}{\phi_{80}^A} \right) \quad (2.4)$$

Para esta fórmula (2.4), é possível observar um ajuste muito próximo dos resultados, para um tempo de moagem muito curto (nos primeiros 2 minutos) até uma razão de redução de 6 (Austin et al., 1984).

A lei de Bond (1952), (representada na equação 2.5) é traduzida matematicamente por uma equação muito semelhante a (2.4) mas, tratando-se também de uma lei empírica, ajusta razoavelmente os resultados até uma razão de redução de 12, segundo o caso analisado por Austin et al., (1984).

$$E = C \times \left(\frac{10}{\sqrt{\phi_{80}^P}} - \frac{10}{\sqrt{\phi_{80}^A}} \right) \quad (2.5)$$

onde as variáveis assumem o mesmo significado que na equação (2.4). Bond (1952), alega que a raiz nesta expressão advém dos mecanismos de fractura de Griffith, (1921), pois o comprimento crítico da fractura vem dentro de uma raiz¹, no entanto, sendo este um argumento fraco, isto não impede o uso desta equação para o dimensionamento de moinhos, tendo em consideração que não se trata de uma lei fundamental que tem de ser satisfeita sob todas as condições.

¹ $\sigma = \frac{k}{\sqrt{c}}$, sendo c metade do comprimento da fissura

Walker, (Walker et al., 1937) tentou produzir uma expressão geral para a cominuição (2.6), onde x representa o calibre da partícula e onde n toma o valor de 1 para a lei de Kick, 2 para Rittinger e 1.5 para Bond. Hukki (1961) após avaliar as relações calibre-energia, apresenta uma proposta de correcção ao trabalho de Walker, afirmando que cada uma das pseudo-leis tem aplicação restrita: a lei de Kick é aplicável em britagem, a lei de Rittinger pode ser usada para moagem fina e a lei de Bond é aplicável no espectro convencional da moagem. Hukki afirmou ainda que o índice n não é constante para cada lei, mas sim dependente da dimensão característica das partículas, propondo a substituição do n por um $f(x)$, uma função que varia com o calibre das partículas. Austin, (1973), também se pronuncia sobre a expressão geral proposta por Walker, afirmando que não faz sentido considerar facturas diferenciais em partículas, corrigindo assim a equação 2.6 trocando o significado de x de calibre das partículas por calibre médio das partículas:

$$\partial E = -C_M \frac{\partial x}{x^n} \quad (2.6)$$

Charles (1957) afirma que apesar de vários sucessos no dimensionamento de circuitos de moagem através das leis de Kick e Rittinger, estas teorias não são correctas para esse fim. O mesmo autor, tenta ajustar um padrão de resultados clássicos de moagem a uma distribuição, usando para esse efeito as distribuições de Schuhmann e de Rosin-Rammler (Charles, 1957). São representadas graficamente por rectas paralelas, descrevendo a evolução de cada fracção granulométrica com o tempo, o que facilita uma previsão de casos reais, baseando-se em casos teste ou ensaios laboratoriais. Nesta dissertação é utilizada a distribuição de Rosin-Rammler, dado ser a mais usada para descrever distribuições granulométricas em processos de cominuição.

Desde os trabalhos de Brown (1941), Epstein (1948), Sedlatschek & Bass (1953) e Broadbent & Callcott (1956, 1957) que as equações de moagem descontínua começaram a ser cada vez mais utilizadas para descrever o processo de cominuição. Também conhecidas como modelo cinético da cominuição, as equações da moagem descontínua produziram uma grande quantidade de resultados validados, ao ponto de Austin et al., (1984), concluir que não há necessidade de procurar as razões fundamentais que tornam estas relações aplicáveis. Elas são o resultado frutífero de uma hipótese razoável (e provada experimentalmente) e da forma dos valores de S e de B , que são respectivamente a taxa de fragmentação específica e os descendentes primários da fragmentação, os valores S e B aparecem nas equação da secção 2.1 que se segue. Sendo isto verdade para descrever um processo existente, numa perspectiva de optimização este ponto de vista perde a validade.

Neste trabalho vamos nos focar mais no índice de energia de Bond e a sua modelação, por ser considerado o melhor método e, por isso, o mais usado na indústria mineira (Williams et al., 2015). Este apresenta duas grandes vantagens face aos restantes: é bastante simples e é aplicável na maioria das circunstâncias. Os artigos originalmente produzidos por Bond foram resumidos em importantes publicações em 1960 mas, para além de confusos, apresentavam erros, o que levou Rowland & Kjos (1978) a apresentarem este método e a sua aplicação prática de forma mais clara. É esta a publicação de referência do método de Bond devido à maior facilidade de compreensão.

A modelação do ensaio laboratorial de Bond faz-se recorrendo ao estudo da cinética de moagem usando um procedimento específico para estimar a moabilidade de Bond (G_B ou G_{bp}). Outros autores, como Kapur (1970) e Karra (1981), tentaram modelar o ensaio de Bond, procurando reduzir o trabalho laboratorial por ser moroso e muito sensível a erros. Outros ainda tentaram modelar este ensaio baseando-se na moagem cinética de primeira ordem, com maior ou menor sucesso, mas como Bond afirmou após criar um algoritmo para facilitar este cálculo, estes algoritmos não foram criados para substituir o método, mas sim para avaliar o dia-a-dia das operações de cominuição e fazer os devidos ajustes à instalação já existente, de forma a otimizar as instalações às heterogeneidades naturais dos maciços rochosos e dos depósitos minerais (Austin et al., 1984).

2.1 Modelo Cinético da moagem laboratorial *batch* ou por lotes

As equações básicas do modelo matemático da moagem laboratorial por lotes descrevem a variação da massa de material sólido em cada classe ou intervalo granulométrico i .

As equações de balanço de massa descrevem a variação com o tempo da massa do material na fracção i , $M\rho_i$. Como a massa total do lote de material a ser moído, M , é constante, as equações de balanço de massa podem ser simplificadas lidando com as fracções de massa/peso, p_i , (Austin et al., 1984)

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = -S_i p_i(t) + \sum_{j=1}^{i-1} b_{i,j} S_j p_j(t), \quad n \geq i \geq j \geq 1 \quad (2.7)$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Taxa de variação} \\ \text{de material na fracção } i \end{array} \right] = \left[\begin{array}{l} \text{Taxa de destruição} \\ \text{de partículas da fracção } i \end{array} \right] + \left[\begin{array}{l} \text{Taxa de geração de partículas} \\ \text{da fracção } i \text{ devido à fragmentação} \\ \text{das fracções mais grosseiras} \\ j = 1, i-1 \end{array} \right]$$

com n o número de fracções granulométricas, t o tempo cumulativo de moagem, $p_i(t)$ a fracção mássica do material na i -ésima classe granulométrica no tempo de moagem (cumulativo) t , S_i a taxa específica de fragmentação do material no i -ésimo intervalo granulométrico, quantificando a fracção de material na i -ésima fracção granulométrica que é fragmentada/destruída por unidade de tempo, e $b_{i,j}$ a função de fragmentação discretizada, que descreve a composição granulométrica dos fragmentos primários gerados por fragmentação do material da classe j que se reporta à classe i .

Assumindo a invariância dos parâmetros S_i e $b_{i,j}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, com o tempo t de moagem e $S_i \neq S_j$ para todo o par i, j , a solução do sistema de equações diferenciais lineares ordinárias de coeficientes constantes tem a expressão que se segue

$$p_i(t) = \sum_{j=1}^i d_{ij} p_j(0), \quad n \geq i \geq 1 \quad (2.8)$$

onde

$$d_{ij} = \begin{cases} 0, & i < j \\ e^{-S_i t}, & i = j \\ \sum_{k=j}^{i-1} c_{ik} c_{jk} (e^{-S_k t} - e^{-S_i t}), & i > j \end{cases}, \quad \text{com } c_{ij} = \begin{cases} -\sum_{k=i}^{j-1} c_{ik} c_{jk}, & i < j \\ 1, & i = j \\ \frac{1}{S_j - S_i} \sum_{k=j}^{i-1} S_k b_{ik} c_{kj}, & i > j \end{cases} \quad (2.9)$$

os parâmetros da cinética da moagem laboratorial *batch*, S_i e $b_{i,j}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, podem ser determinados por procedimentos experimentais descritos em detalhe em Austin et al., (1984) ou estimados através de relações matemáticas empíricas validadas com os resultados de numerosos ensaios experimentais.

Uma relação largamente usada para descrever a variação de S_i com o calibre característico (limite superior), ϕ_i , de cada classe granulométrica i é dada por Austin et al., (1984)

$$S_i = S_1 \left(\frac{\phi_i}{\phi_0} \right)^\alpha Q_i, \quad Q_i = \frac{1}{1 + \left(\frac{\phi_i}{\mu} \right)^\Lambda}, \quad n \geq i \geq 1 \quad (2.10)$$

com S_1 , α , μ e Λ parâmetros a ajustar num exercício de minimização de função dos resíduos entre as distribuições granulométricas observadas e previstas/estimadas pelo modelo cinético.

As distribuições granulométricas dos fragmentos primários, $b_{i,j}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, são usualmente definidas a partir de distribuições cumulativas inferiores, $B_{i,j}^C$, como se segue

$$\begin{cases} b_{i,j} = B_{i,j}^C - B_{i+1,j}^C, & 1 \leq j \leq i \leq n-1 \\ b_{n,j} = B_{n,j}^C \end{cases} \quad (2.11)$$

Para as distribuições cumulativas, $B_{i,j}^C$, têm sido propostas algumas relações empíricas tais como a proposta por Austin et al., (1984)

$$B_{i,j}^C = \begin{cases} 0, & \frac{\phi_{i-1}}{\phi_j} > 1 \quad (i \leq j) \\ 1, & \frac{\phi_{i-1}}{\phi_j} = 1 \quad (i = j), \quad \text{com } \Phi_j = \Phi_0 \left(\frac{\phi_j}{\phi_0} \right)^{-\delta}, \quad \phi_0 = 1 \text{ mm} \\ \Phi_j \left(\frac{\phi_{i-1}}{\phi_j} \right)^\gamma + (1 - \Phi_j) \left(\frac{\phi_{i-1}}{\phi_j} \right)^\beta, & \frac{\phi_{i-1}}{\phi_j} \leq 1 \quad (i > j) \end{cases} \quad (2.12)$$

com γ , β , ϕ_0 e δ parâmetros a estimar, ou por R.P. King (King, 2001)

$$B_{i,j}^C = \begin{cases} 0, & \frac{\phi_{i-1}}{\phi_j} > 1 \quad (i \leq j) \\ 1, & \frac{\phi_{i-1}}{\phi_j} = 1 \quad (i = j) \\ 1 - (1 - t_{10}) \left(\frac{\frac{\phi_j}{\phi_{i-1}}}{\frac{\phi_j}{\phi_{i-1}} - 1} \right)^\gamma, & \frac{\phi_{i-1}}{\phi_j} \leq 1 \quad (i > j) \end{cases} \quad (2.13)$$

com t_{10} e γ parâmetros a estimar.

2.2 Método de Bond

A lei de Bond (1952), também conhecida como terceira lei da cominuição diz que a energia total necessária na cominuição é proporcional ao aumento da profundidade das fissuras produzidas na fragmentação das partículas. Em partículas de forma similar, a profundidade das fissuras é equivalente à raiz quadrada de metade da área de superfície, e o aumento da profundidade das fissuras é proporcional a $\left(\frac{1}{\sqrt{\phi_{80}^P}} - \frac{1}{\sqrt{\phi_{80}^A}} \right)$.

Onde o ϕ_{80}^P representa em micrómetros a fracção granulométrica módulo de calibre a 80% do produto, e o ϕ_{80}^A módulo de calibre a 80% da alimentação.

Desta lei advém que o índice de energia, W_i , parâmetro que representa a resistência de um material (normalmente, uma rocha) à moagem. Numericamente o índice de energia representa a energia (kwh/t) necessária para reduzir uma tonelada de um dado material (alimentação) de um calibre inicial, teoricamente infinito, até um calibre tal que 80% passe por um crivo de 100 μm .

O Método Standard de Bond (Bond & Maxson, 1943) refere que o índice de energia é determinado pela simulação de uma moagem a seco num circuito fechado com um moinho de bolas, chamado de

moinho de Bond, com uma carga circulante de 250% (Bond, 1949, 1952, 1961). O teste é feito num material infra 3,55 mm (ou 3550 μm), o moinho é carregado com uma carga de bolas específica, chamada de carga de Bond e o material a moer é adicionado num lote de 700 cm^3 .

O moinho de Bond tem dimensão de 30.5x30.5cm, e uma velocidade constante de 70rpm sendo um equipamento laboratorial de bancada. A carga de bolas a utilizar são 285 bolas de aço com diâmetros conhecidos, com uma massa total de 20125g e uma superfície específica de 842 in^2 (5432,25 cm^2). Para este ensaio também é preciso escolher um crivo teste, que irá definir a granulometria alvo da moagem, normalmente ronda os 100 a 125 μm (Bond & Maxson, 1943).

O ensaio é iniciado com um número de revoluções arbitrárias do moinho e inicia-se um processo iterativo. Após a moagem da primeira amostra, criva-se o produto no crivo teste e avalia-se a proporção supra e infra crivo. O material supra crivo volta para o moinho, com uma recarga de nova alimentação em igual massa ao infra crivo produzido mais as perdas. Com o objectivo de alcançar uma carga circulante (cc) de 250%, ajusta-se o número de revoluções e inicia-se o ciclo seguinte. Se o valor for inferior é necessário diminuir o tempo de moagem, ou seja, menos revoluções, se for superior acontece o inverso. Após obtermos, em três ensaios consecutivos, valores muito idênticos ao objectivo assumimos estacionaridade e o ensaio acaba. Normalmente, ao fim de 6 a 12 ciclos consegue-se atingir estacionaridade (Umucu & Deniz, 2014). Após atingir a estacionaridade, determina-se a média da velocidade de moagem dos últimos três ensaios, que corresponderá à Moabilidade de Bond (G_B). O índice de energia de Bond é então calculado pela seguinte fórmula:

$$W_i = 1,1 \frac{44.5}{MOG^{0.23} \times G_B^{0.82} \times \left(\frac{10}{\sqrt{x_P}} - \frac{10}{\sqrt{x_F}} \right)} \quad (2.14)$$

Onde: W_i – Índice de energia de Bond (kwh/t)

MOG – Tamanho da malha do crivo teste (μm)

G_B – Índice de Moabilidade de Bond (g/rev)

ϕ_{80}^A – Módulo de calibre 80% passante da alimentação do moinho (μm)

ϕ_{80}^P – Módulo de calibre 80% passante do produto da moagem (μm)

A equação 2.14 varia da equação original pelo factor multiplicativo de 1,1 que é usado para fazer a conversão de toneladas curtas para toneladas métricas. Muitos trabalhos não referem as unidades e fazem por isso o uso incorrecto desta fórmula.

A determinação da energia consumida na moagem num moinho de Bond, requer amostra de calibres standard (infra 3.55mm), pois alterações do calibre das amostras causa variações no índice de energia de Bond (Magdalinovic et al., 2012).

Rowland (1998) sugeriu uma série de factores de eficiência (EF), para corrigir os valores de potência necessária aos moinhos e a validade do W_i determinado em laboratório, para quando se estudam

circuitos que diferem das condições pré-estabelecidas por Bond. Estes factores estão expostos na Tabela 1, sendo que nem todos são necessários usar, como por exemplo do EF₄ ao EF₇ apenas se usam se se verificarem as condições expostas na coluna EF. Estes factores são chamados de factores de ineficiência por alguns autores pois maior parte são superiores a 1, revelando ineficiências.

Tabela 1 - Tabela dos factores de eficiência (EF) e o seu respectivo cálculo (Rowland, 1998)

EF	Moinho de varas	Moinho de bolas
EF_1 (Moagem a seco/húmido)	$\begin{cases} 1.0, \text{ Moagem a húmido} \\ 1.3, \text{ Moagem a seco} \end{cases}$	$\begin{cases} 1.0, \text{ Moagem a húmido} \\ 1.3, \text{ Moagem a seco} \end{cases}$
EF_2 (Circuito aberto/fechado) ¹	$\begin{cases} 1.0 - \text{ Circuito fechado} \\ 1.2 - \text{ Circuito aberto} \end{cases}$	$\begin{cases} 1.0 - \text{ Circuito fechado} \\ 1.2 - \text{ Circuito aberto} \end{cases}$
EF_3 (Eficiência de Diâmetro)	$\begin{cases} \left(\frac{2.44}{D}\right)^{0.2}, D \leq 3.81 \text{ m} \\ 0.914, D > 3.81 \text{ m} \end{cases}$	$\begin{cases} \left(\frac{2.44}{D}\right)^{0.2}, D \leq 3.81 \text{ m} \\ 0.914, D > 3.81 \text{ m} \end{cases}$
EF_4 (Alimentação de grandes dimensões) ($F_{80} > F_{80}^{opt}$)	$F_{80}^{opt} = 16000 \sqrt{\frac{14.33}{WI_R}}$	$F_{80}^{opt} = 4000 \sqrt{\frac{14.33}{WI_B}}$
	$EF_4 = \frac{R_{80} + \left(\frac{WI_X}{1.103} - 7\right) \times \left(\frac{F_{80} - F_{80}^{opt}}{F_{80}^{opt}}\right)}{R_{80}}$	
EF_5 (Finura de moagem) $P_{80} < 75\mu\text{m}$	1	$EF_5 = \frac{P_{80} + 10.3}{1.145 \times P_{80}}$
EF_6 (Alto/Baixo R_{80}) $ R_{80} - R_{80}^{opt} > 2$	$R_{80}^{opt} = \frac{5 \times (L - 0.5)}{D}$ $EF_6 = 1 + \frac{(R_{80} - R_{80}^{opt})^2}{150}$	1
EF_7 (baixa razão de redução) $R_{80} < 6$	1	$EF_7 = \frac{2 \times (R_{80} - 1.35) + 0.26}{2 \times (R_{80} - 1.35)}$
EF_8 (Factor da moagem com varas)	(+)	1

1- EF₂ - Moagem em circuito aberto (moinho de bolas)

Rowland atribuiu um factor de ineficiência à moagem em circuito aberto com moinho de bolas, que depende do grau de controlo exigido para a granulometria do produto, segundo a tabela 2. Na Tabela 2 apresenta-se o valor mais habitual, que é o 80% passante (Rowland, 1998).

Tabela 2 - Factor de ineficiência vs percentagem de produto infra malha do crivo teste (Rowland, 1998)

% Passante na malha de teste	Factor de ineficiência
50	1.035
60	1.05
70	1.10
80	1.2
90	1.4
92	1.46
95	1.57
98	1.70

Em termos de W_i , nesta tese temos o operacional, o experimental, o corrigido e o simulado. O índice x no W_i e no E indica que é algo referente a mais que um W_i ou E , ou seja, há fórmulas que se podem aplicar a diversos W_i 's e E 's. O índice op de operacional, exp para o experimental, sim para o simulado e cor para o corrigido. As diferenças entre estes índices são grandes: o W_i experimental é obtido através da fórmula 2.14, usando os valores referentes ao ensaio laboratorial, ao qual ainda não foram aplicadas quaisquer correcções; o corrigido é o índice de energia de Bond corrigido (2.17), obtido multiplicando os factores de eficiência pelo W_{iexp} , o W_{isim} é o equivalente ao W_{iexp} mas todos os cálculos foram feitos através de simulações. O W_{iop} é o índice de energia necessário nos cálculos de dimensionamento para que o resultado obtido seja concordante com o W_{icor} calculado num moinho industrial.

2.2.1 Fórmulas de dimensionamento

O dimensionamento de moinho está fora do âmbito desta tese, mas para efeitos de dimensionamento é necessário calcular a potência (mp) necessária através da definição do caudal pretendido e do cálculo da energia específica de moagem (E_x) para o minério em questão. Neste caso o E_{real} seria calculado usando o W_{icor} , e o $E_{simulado}$ usando o W_{isim} , com os respectivos valores de φ_{80}^P e φ_{80}^A .

$$E_x = W_{i_x} \times \left(\frac{10}{\sqrt{\varphi_{80}^P}} - \frac{10}{\sqrt{\varphi_{80}^A}} \right) [kWh/t] \quad (2.15)$$

$$MP = Q \times E_x \quad [kW] \quad (2.16)$$

$$Wi_{cor} = EF_1 \times EF_2 \times EF_3 \times EF_4 \times EF_5 \times EF_6 \times EF_7 \times EF_8 \times Wi_{exp} \quad (2.17)$$

$$Wi_{op} = Wi_{cor} \times \frac{E_{real}}{E_{simulado}} \quad (2.18)$$

Por fim usando as tabelas de um dos fabricantes de moinhos como a Metso, podemos estimar o tamanho do moinho para o nosso minério.

2.3 Método Simplificado de Kapur

P. C. Kapur (Kapur, 1970) analisou o método de Bond de modo a obter uma interpretação racional e interpretativa do teste em termos dos parâmetros de moagem em circuito fechado. Esta análise levou a um algoritmo de simulação do método de Bond e um esquema prático para a sua simplificação experimental.

2.3.1 Um algoritmo para o ensaio de Bond (Kapur, 1970)

Um algoritmo razoavelmente generalista pode ser construído tendo em consideração as restrições do modelo fenomenológico linear da moagem, nomeadamente não haver interacção entre partículas e a invariância temporal nos parâmetros de selecção e fragmentação.

O Ensaio de Bond começa com a moagem de uma determinada quantidade de material, M_1 , da alimentação por um intervalo de tempo arbitrário, t_1 . No final do primeiro ciclo a quantidade, R_1 , de produto do moinho retida no crivo de teste que volta para o moinho como componente da nova alimentação para o segundo ciclo, que é

$$R_1 = rM_1\phi(t_1) \quad (2.19)$$

onde r é a fracção da alimentação original retida no crivo de teste e $\phi(t_i)$ é uma função dos parâmetros de selecção, fragmentação e da distribuição granulométrica da alimentação inicial em função do tempo de moagem, t_1 . Esta função é computável pela solução da equação de moagem discreta em circuito fechado (Reid, 1965). Para esta análise do ensaio de Bond, $\phi(t)$ pode considerar-se uma representação da cinética de moagem em circuitos fechados determinada empiricamente.

É de notar que M_1 é a massa total ensaiada em cada teste, igual em todos os testes.

A massa infra malha de teste produzida no primeiro ciclo (U_1) é

$$U_1 = rM_1 - R_1 \quad (2.20)$$

e velocidade de moagem neste ciclo é de

$$g_1 = \frac{U_1}{t_1} \quad (2.21)$$

tendo em conta que, a massa total da alimentação do moinho é mantida, o peso da nova alimentação adicionada ao supra crivo para o segundo ciclo é dada pela soma do material infra presente na primeira amostra, mais o produzido no primeiro ciclo

$$M_2 = U_1 + [1 - r]M_1 \quad (2.22)$$

o peso das partículas infra crivo teste no início do segundo ciclo, dentro do moinho é $[1 - r]M_2$. Se U_e é o peso do produto infra crivo teste estipulado para obter 250% de carga circulante, no ensaio de Bond atingida a estacionaridade do ensaio, a quantidade de material moído desejada para o segundo ciclo é de $U_e - [1 - r]M_2$. Então, seguindo a recomendação de Bond, o tempo de moagem calculado para este ciclo deve ser de

$$t_2 = \frac{1}{g_1} [U_e - [1 - r]M_2] \quad (2.23)$$

No produto do segundo ciclo, a quantidade de material retida no crivo teste é agora dado por

$$R_2 = rM_1\phi(t_1 + t_2) + rM_2\phi(t_2) \quad (2.24)$$

Generalizando, para n ciclos

$$R_n = \sum_{k=1}^n R_n^k \quad (2.25)$$

Onde R_n^k é o peso das partículas supra MOG da alimentação do ciclo k e que se mantém supra MOG após o ciclo n.

Substituindo a equação 2.19 na equação 2.25 obtém-se

$$R_n = \sum_{k=1}^n \left[rM_k\phi \left(\sum_{i=k}^n t_i \right) \right] \quad (2.26)$$

tal como,

$$U_n = R_{n-1} + rM_n - R_n \quad (2.27)$$

$$g_n = \frac{U_n}{t_n} \quad (2.28)$$

$$M_{n+1} = U_n + [1 - r]M_n \quad (2.29)$$

$$t_{n+1} = \frac{1}{g_n} [\bar{U}_e - [1 - r]M_{n+1}] \quad (2.30)$$

As equações 2.26 a 2.30 providenciam o algoritmo desejado para uma simulação, por etapas, do ensaio de Bond sendo conhecida a função $\phi(t)$. O procedimento envolve simulações recursivas do g_n com $n=1,2,3,\dots$, até a sequência convergir, dando assim a moabilidade de Bond, G_B .

2.3.2 Relação entre Bond e moagens por lotes (*batch*) (Kapur, 1970)

Considerando o índice 'e' como indicador de estacionaridade, na simulação do circuito fechado do teste de Bond, então a carga circulante de 250% é

$$R_e = \frac{2,5}{3,5} M_1 \quad (2.31)$$

e a nova alimentação é

$$M_e = M_1 - R_e \quad (2.32)$$

como a massa supra crivo no peso total da alimentação do moinho é $R_e + rM_e$, a quantidade de finos produzida depois de atingida a estacionaridade é

$$U_e = R_e + rM_e - R_e = rM_e \quad (2.33)$$

com isto calcula-se a velocidade de moagem, para a estacionaridade

$$G_B = \frac{rM_e}{t_e} \quad (2.34)$$

onde t_e , tempo de moagem, é dado por

$$R_e = R_e \phi'(t_e) + rM_e \phi(t_e) \quad (2.35)$$

a função ϕ' representa a distribuição granulométrica da carga circulante e $\phi' \neq \phi$. Mesmo quando ϕ e ϕ' são conhecidos, não é possível obter uma solução analítica para a equação 2.35 em termos de t_e - excepto para uma classe muito restrita de funções em que

$$\phi'(t_e) = \exp[G't_e] \quad (2.36)$$

e

$$\phi(t_e) = \exp[Gt_e] \quad (2.37)$$

A equação 2.35 pode agora ser escrita da seguinte forma

$$R_e = R_e \exp[G't_e] + rM_e \exp[Gt_e] \quad (2.38)$$

para um valor suficientemente pequeno de $G't_e$ e Gt_e

$$R_e = R_e[1 + G't_e] + rM_e[1 + Gt_e] \quad (2.39)$$

ou

$$t_e = -\frac{rM_e}{R_eG' + rM_eG} \quad (2.40)$$

combinando este resultado com a equação 2.34 obtemos

$$G_B = -R_eG' - rM_eG \quad (2.41)$$

finalmente, a substituição das equações 2.31 e 2.32 e reorganizando a igualdade, obtém-se uma relação explícita entre a moabilidade de Bond e os parâmetros da moagem descontínua

$$G_B = -rM_1GA \quad (2.42)$$

onde

$$A = \frac{2.5}{3.5} \left[\frac{G'}{rG} - 1 \right] + 1 \quad (2.43)$$

além disso, das equações 2.19 e 2.37, com t em vez de t_e , o ritmo inicial da produção de finos para uma moagem descontínua, num tempo perto de zero é dado por

$$Y = -\frac{dR(t)}{dt} = -rM_1G, \quad t \rightarrow 0 \quad (2.44)$$

combinando este resultado com a equação 2.42 obtém-se a seguinte relação simples entre moagem de Bond e moagem descontínua

$$G_B = YA \quad (2.45)$$

para um conjunto de rochas e minerais, muito diferentes em termos de dureza e fractura, Smith & Lee, (1968), descobriram que a moabilidade de Bond é directamente proporcional ao ritmo inicial de produção de finos numa moagem descontínua, com uma constante de proporcionalidade que varia de 1 a 1.5. Estes resultados são concordantes com a equação 2.45. Tendo avaliado uma grande quantidade de resultados de ensaios de Bond, o autor (Prakash C. Kapur) mostra que o valor de r varia entre 0.95 e 0.6. Além disso, torna-se óbvia a desigualdade

$$\frac{G'}{G} < 1 \quad (2.46)$$

pois G' refere-se às partículas recicladas, cuja média de calibres é inferior à da nova alimentação, e as partículas de menores calibres levam, normalmente, mais tempo a ser moídas. É também razoável inferir que o rácio da equação 2.46 não deverá divergir muito da unidade, tendo em conta os 250% de carga circulante, a distribuição granulométrica das partículas recicladas não irá divergir muito da componente supra crivo teste da nova alimentação. Então, o valor de A , na equação 2.43 também será aproximadamente unitário.

Apesar da natureza algo arbitrária das simplificações introduzidas na sua derivação, a equação 2.42 é válida para a grande maioria dos minérios.

2.3.3 Estimação da moabilidade de Bond (Kapur, 1970)

O esquema simplificado que se segue, para a determinação da moabilidade de Bond, foi baseado em resultados obtidos nos dois primeiros ciclos do ensaio de Bond Standard. Esta abordagem foi facilitada pelo facto de o autor ter disponíveis uma grande quantidade de resultados de ensaios de Bond. Da equação 2.19, após o primeiro ciclo

$$R_1 = rM_1 \exp[Gt_1] \quad (2.47)$$

consequentemente, uma estimativa do parâmetro de moagem $G=G_1$ é

$$G_1 = \frac{1}{t_1} \ln \frac{R_1}{rM_1} \quad (2.48)$$

como verificação, a segunda estimativa, $G=G_2$, é obtida pela solução numérica da seguinte equação, que corresponde à equação 2.24 para o segundo ciclo, ou

$$R_2 = rM_1 \exp[G_1 t_1 + G_2 t_2] + rM_2 \exp[G_2 t_2] \quad (2.49)$$

dentro dos limites da precisão experimental, G_1 e G_2 deveriam ser iguais. Apesar de se verificar que, em certas amostras não acontece, fruto da complexa heterogeneidade da natureza.

De modo a completar a análise, ficou decidido adoptar o G_2 como representativo do parâmetro de moagem. É sabido que nos primeiros dois ou três ciclos encadeados de um ensaio de Bond, o sistema invariavelmente vai estabilizando para uma aproximação lenta às condições de estacionaridade. É, portanto, aceite no que diz respeito à libertação mineral, quantidade de finos, distribuição granulométrica de toda a alimentação e classificação baseada na resistência distribuída das partículas, se existir, que a globalidade das condições que prevalecem no segundo ciclo serão mais próximas da estacionaridade, que as condições do primeiro ciclo. Como tal G_2 , deverá ser mais preciso na estimação da moabilidade de Bond.

Comparando resultados experimentais da moabilidade de Bond (g/rev), com moabilidades calculadas através do algoritmo dado pelas equações 2.26 a 2.30, após substituir a equação $\phi(t) = \exp[Gt]$ ($G=G_2$) na equação 2.26, e com moabilidades calculadas através da equação 2.42, com $A=1$, para as

mesmas amostras, obteve-se resultados razoavelmente concordantes entre o experimental e as duas simulações. Na maioria dos casos a diferença é menor que o erro de replicabilidade/reprodução do ensaio de Bond.

2.3.4 Relação entre G_2 e o índice de energia de Bond (Kapur, 1970)

O facto de existir uma relação, razoavelmente precisa e simples, entre o G_2 e a moabilidade de Bond possibilita o cálculo do índice de energia de Bond directamente do parâmetro anterior. Isto é conseguido pela equação empírica que se segue:

$$W_i = K[MOG]^a[-G_2]^b[rM_1]^c[1-r]^d \quad (2.50)$$

onde W_i é o índice de energia de Bond e MOG é a malha do crivo teste, em μm .

As constantes desconhecidas K e os expoentes foram calculados pelo procedimento da soma dos mínimos quadrados aplicado aos testes cujos resultados são conhecidos ao autor (Kapur). E o índice de energia de Bond experimental foi calculado pela seguinte fórmula.

$$W_i = 44.5 \left[MOG^{0.23} G_b^{0.82} \left[\frac{10}{\sqrt{\varphi_{80}^P}} - \frac{10}{\sqrt{\varphi_{80}^A}} \right] \right]^{-1} \quad (2.51)$$

Onde φ_{80}^A e φ_{80}^P se referem à malha de crivo que deixa passar 80% da alimentação e do produto, respectivamente. A equação estatística resultante é

$$W_i = 2.648[MOG]^{0.406}[-G_2]^{-0.810}[rM_1]^{-0.853}[1-r]^{-0.099} \quad (2.52)$$

Ambas as equações 2.51 e 2.52 resultam em kwh/tc , e devem ser multiplicadas por 1.1 para obter-se o resultado em kwh/t .

Capítulo 3 – Procedimento Experimental

Neste capítulo apresentam-se os procedimentos experimentais usados na elaboração deste trabalho, bem como os seus resultados e motivações.

3.1 Equipamentos

Para a concretização dos procedimentos experimentais que servem de base a este trabalho, foram utilizados os seguintes equipamentos:

- Britador de maxilas com diferentes ajustes de goela, fabricante: Allen West & Co. Ltd.
- Moinho de rolos, fabricante: Sturtevant Engineering Co. Ltd. London
- Moinho de Denver, 40x40cm circular de forro liso
- Divisor de Jones (um grande de 48x25 cm, um médio de 25x18 cm e um pequeno de 12x8 cm)
- Torva
- Agitadores Electromagnéticos: Fritsch Analysette 3 Spartan e Fritsch Analysette
- Crivos 3550 – 45 µm de malha de aço e dimensão 200x50 mm, marca: Retsch,
- Tina de ultrassons, marca: Fritsch Laborette 17
- Crivo cego
- Crivo cego com saída de água ligada a uma mangueira
- 25 Gamelas de diâmetro superior aos crivos em uso (200mm)
- Balança KERN EW4200-2NM (erro de +/- 0,01g)

3.2 Material Geológico

O material usado neste trabalho é um Calcário de Lioz ou pedra lioz, que ocorre em Portugal, na região de Lisboa e seus arredores (norte e noroeste), nomeadamente no concelho de Sintra (Figura 1), sendo aqui extraído nos arredores da vila de Pêro Pinheiro. Os calcários são rochas muito abundantes e apesar da sua variabilidade são usados muitas vezes como padrão para novos ensaios, a sua escolha foi não só por isso mas por ser também o material que havia disponível no laboratório em quantidade suficiente para este trabalho.



Figura 1 - Mapa da região de Portugal onde podemos encontrar a rocha usada neste trabalho (Calcário de Lioz), fonte: LNEG - Laboratório Nacional de Engenharia Geológica

Os seus depósitos foram formados no período Cenomaniano (Cretácico) num ambiente de mar pouco profundo, de águas quentes e límpidas, propícias à proliferação de organismos de esqueleto carbonatado, nomeadamente de bivalves rudistas, construtores de recifes. A rocha caracteriza-se por ser um calcário bioclástico e calciclástico compacto, rico em biosparite e microsparite, geralmente de cor bege, embora existam variedades com coloração que variam entre cinza-claro, rosado e esbranquiçado. A amostra usada (Figura 2) é maioritariamente bege com pó branco, apresentado cristais nas diversas cores acima referidas (fonte: <https://rop.lneg.pt/rop/FormProduto.php>).



Figura 2 - À esquerda um bloco de Calcário de Lioz usado nos ensaios laboratoriais, à direita o mesmo bloco após fragmentação com recuso a marreta, num recipiente com 50 cm de comprimento e 20 cm de largura

O lioz apresenta as seguintes características técnicas médias:
(fonte: <https://rop.lneg.pt/rop/FormProduto.php>)

- Resistência à compressão: 1050 kg/cm²
- Resistência à compressão após teste de gelividade: 1380 kg/cm²

- Resistência mecânica à flexão: 147 kg/cm²
- Densidade aparente: 2703 kg/m³
- Absorção de água à pressão atmosférica normal: 0,1 % (peso)
- Porosidade aberta: 0,3 % (volume)
- Coeficiente de dilatação linear térmica^[3]: $3,3 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$
- Resistência ao desgaste (abrasímetro Amsler): 2,2 mm
- Resistência ao choque: 45 cm

3.3 Metodologia do trabalho experimental

De modo a validar o método alternativo em análise, foi realizado um ensaio cinético de moagem e um ensaio de Bond. Os resultados do ensaio cinético são usados pelo Excel do método alternativo em análise para criar um modelo matemático e simular um ensaio de Bond e o ensaio de Bond é usado de modo a validar o resultado produzido pelo Excel do método alternativo em análise.

O Excel tem como função, simular um ensaio de Bond, calculando assim o índice de energia de Bond (W_i) e o seu intervalo de confiança, sem recorrer à execução de um ensaio de Bond, que é altamente sensível a erros experimentais, e estes são difíceis de minimizar, prever e quantificar.

Neste capítulo expõe-se os procedimentos de cada passo, as máquinas e ferramentas usadas e os respectivos resultados obtidos.

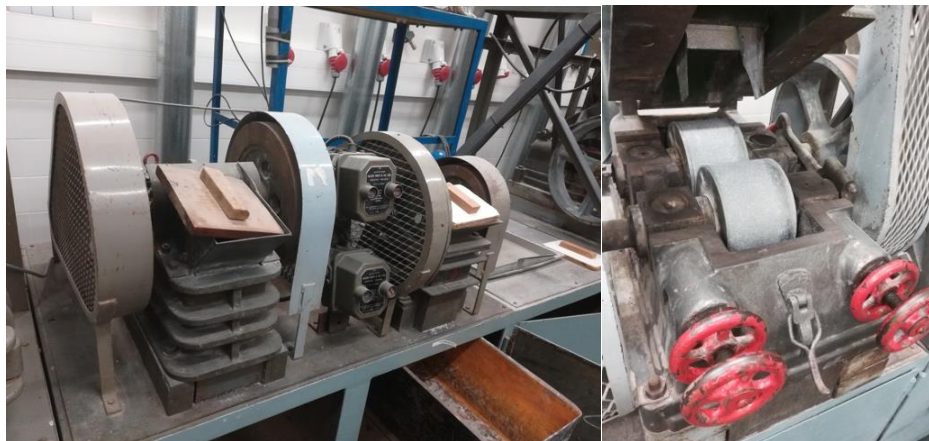


Figura 3 – Britadores de maxilas (esquerda) e moinho de rolos (direita)

3.3.1 Preparação das amostras a ensaiar

De acordo com o ensaio de Bond, as amostras a ensaiar têm de apresentar granulometria inferior a 3,55mm, e em quantidade suficiente para as repetições necessárias à estabilização do ensaio. Na figura 4 as massas referem-se a um ensaio de Bond num moinho de Bond, pelo que vão diferir das quantidades usadas neste trabalho.

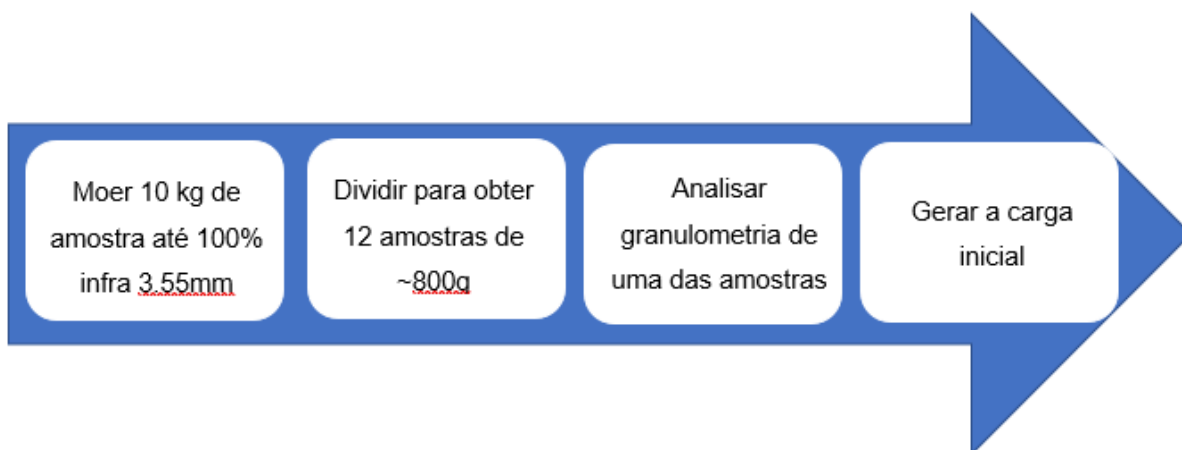


Figura 4 - Preparação esquemática da amostra inicial ao ensaio de Bond

Dado que o ensaio cinético pode ser realizado nas mesmas condições que o ensaio de Bond, a preparação das amostras seguiu apenas as especificações do ensaio de Bond, descritas abaixo. Deste modo preparou-se a amostra reduzindo-a com recurso a uma marreta (Figura 2), britadores de maxilas e um moinho de rolos (Figura 3). Como o moinho de rolos foi a última etapa ajustou-se a goela ao calibre máximo pretendido 3,55 mm. Após a moagem no moinho de rolos, o produto foi crivado a 3550 μm , o produto infra, denominado de produto do moinho de rolos infra 3550 μm (PMR -3550 μm), foi armazenado e o supra crivo voltou para o moinho de rolos até se garantir material PMR infra 3550 μm suficiente para os ensaios. Na figura 5 à direita mostra-se o material PMR, à esquerda o material PMR +3550, ambos em recipientes metálicos e ao centro, na bacia branca o material PMR -3550 e o crivo de 3550 que foi usado para esta crivagem.



Figura 5 - Processo de crivagem manual do PMR

Após ter sido reunido o material necessário para amostrar, através de sucessivas divisões usando divisores de Jones, prepararam-se quatro amostras para análise granulométrica (AG), denominadas de AG 1 a 4, outras quatro amostras para a alimentação do moinho de bolas (AMB) denominadas de AMB 1 a 4, com o objectivo de realizar o ensaio cinético e mais uma amostra AMB 5 para realizar o

ensaio de Bond. A AMB 5 foi escolhida para servir de alimentação inicial ao ensaio de Bond por ser a que se aproximou mais do valor objectivo.

As suas massas iniciais podem ser observadas na tabela 3, em gramas, e desviam-se do objectivo de 466.67g dada a dificuldade de atingir o valor exacto com um divisor de Jones. Sendo o erro máximo de 1.55% e o erro médio de 0.44% consideraram-se os valores aceitáveis. Outro erro identificado foi o de guardar produtos do moinho de bolas (PMB's) em sacos de plástico para posterior análise granulométrica, processo durante o qual foram perdidas 3g a 8g de material principalmente finos, que se agarram ao funil utilizado no ensacamento das amostras e aos próprios sacos. Após a identificação destas perdas, passou-se a guardar todo o material em gamelas que, por sua vez, eram introduzidas em sacos para evitar perdas e contaminações.

Tabela 3 – Massa da amostras preparadas, em gramas

Nome da amostra	Massa (g)
AMB 1	467.19
AMB 2	466.26
AMB 3	468.14
AMB 4	466.07
AMB 5	466.45
AG 1	466.11
AG 2	467.41
AG 3	473.90
AG 4	473.34

Os lotes de material AG 1 a 4 foram usados para caracterizar granulometricamente o produto PMR - 3550 μm , que serviu de amostra inicial dos diversos ensaios. A repetição da análise serve para minimizar e quantificar possíveis erros de amostragem e de crivagem.

3.3.2 Caracterização Granulométrica

Todas as análises granulométricas neste trabalho foram realizadas com recurso a um agitador electromagnético, de forma a proporcionar uma melhor crivagem e consequente separação granulométrica, seguindo sempre os mesmos procedimentos: empilhamento de crivos sobre um crivo cego, seguindo uma progressão geométrica de razão raiz de dois entre crivos; colocação da pilha de crivos no agitador electromagnético; introdução do material, a crivar, no crivo superior; fixação da tampa, que se introduz no crivo superior e se prende à placa vibratória, e definição do tempo de crivagem e amplitude de vibração. Para as crivagens a húmido, na base da pilha de crivos em vez de um crivo cego normal, foi utilizado um crivo cego com saída de água e nessa saída foi colocada uma mangueira que direcciona a água para um balde. Por outro lado a tampa da pilha de crivos foi substituída por uma tampa com chuveiros e foram adicionados também chuveiros entre os crivos 90 e 63 μm . Foi também necessário ligar e regular a quantidade de água que era introduzida pilha de crivos.

Na tabela 4 podemos observar o tamanho da malha dos crivos usados, a fracção granulométrica resultante e o tipo de crivagem que esses crivos realizaram neste estudo.

Tabela 4 – Crivos utilizados, fracções granulométricas resultantes e tipo de crivagem usada

Crivo (μm)	Fracções granulométricas (μm)	Tipo de Crivagem
2800	-3550 +2800	Seco
2000	-2800 +2000	Seco
1400	-2000 +1400	Seco
1000	-1400 +1000	Seco
710	-1000 +710	Seco
500	-710 +500	Seco
355	-500 +355	Seco/Húmido
250	-355 +250	Seco/Húmido
180	-250 + 180	Seco/Húmido
125	-180 +125	Seco/Húmido
90	-125 +90	Húmido
63	-90 +63	Húmido
45	-63 +45	Húmido
Alguidar de recolha de água	-45 +0	Húmido

As crivagens a seco tiveram a duração de 20 minutos e aos AG's, eram feitas desde a classe superior -3550+2800 μm , ou seja, iniciando no crivo de 2800 μm até ao crivo de 355 μm (figura 6, esquerda), e para os produtos do moinho de bolas (PMB's), desde a mesma classe superior até ao crivo de 500 μm pois, dada a maior quantidade de finos, a sua separação a seco era menos eficiente. Abaixo dos valores referidos, as crivagens eram a húmido, durante 30 minutos, até ao crivo de 45 μm , e a fracção infra 45 μm era retida em baldes. As crivagens a húmido tinham grande probabilidade de colmatar os crivos mais finos, pelo que a partir das 150g as amostras foram divididas, usando um divisor de Jones, e apenas foi analisada uma das fracções dessa divisão.

Entre cada análise granulométrica, foi realizada uma limpeza cuidadosa dos crivos, para minimizar possíveis contaminações e perdas (figura 6, direita).

No ensaio de Bond cada ciclo é finalizado com uma crivagem a 125 μm . Esta crivagem foi realizada num único crivo sobre uma placa vibratória. De modo a obter-se a melhor separação possível, o material ficava 10min sobre o crivo na placa vibratória e no final desse tempo o produto infra era retirado e pesado. Só após duas crivagens com produto infra 125 μm abaixo de um grama é que a crivagem era considerada como finalizada, o produto infra retirado a cada pesagem era armazenado.



Figura 6 - Pilha de crivos sobre um agitador magnético (esquerda), e crivos virados sobre gamelas para recuperação do material supra crivo (direita) – Crivagem a seco

O produto final do ensaio de Bond, após crivagem a 125 μm , sofreu uma análise granulométrica. O produto supra 125 μm foi crivado a seco durante 20min desde o crivo 2800 até ao 180 μm e, o produto infra 125 μm foi dividido num divisor de Jones e cada parte foi crivada de 125 μm até ao crivo de 45 μm a húmido.

No caso do ensaio de Bond o produto infra 125 μm além de dividido, foram analisadas as duas partes com o objectivo de avaliar o erro de crivagem de produtos finos, que ainda não tinha sido analisado para produtos do moinho de bolas, neste trabalho.

3.3.2.1 Caracterização granulométrica da amostra a ensaiar

A amostra a ensaiar, calcário de lioz infra 3550 μm , foi analisada de modo a possibilitar uma caracterização da amostra inicial. Para minimizar os erros associados à amostragem e à crivagem, realizaram-se quatro análises ao AMB, denominadas de AG 1 a 4. Como o estudo é sobre moagem, a característica é a granulometria das amostras, ou seja, a proporção de partículas em cada intervalo granulométrico e a sua variação após cada ensaio. A representação escolhida foi um gráfico de Calibre (μm) com escala logarítmica vs. Cúmulos Inferiores (%), figura 7, que mostra para cada granulometria, a percentagem de material infra presente na amostra, neste caso, para o material PMR -3550 μm . A

figura 7 tem as quatro curvas granulométricas representadas no mesmo gráfico, para facilitar a percepção das parecidozas entre elas.

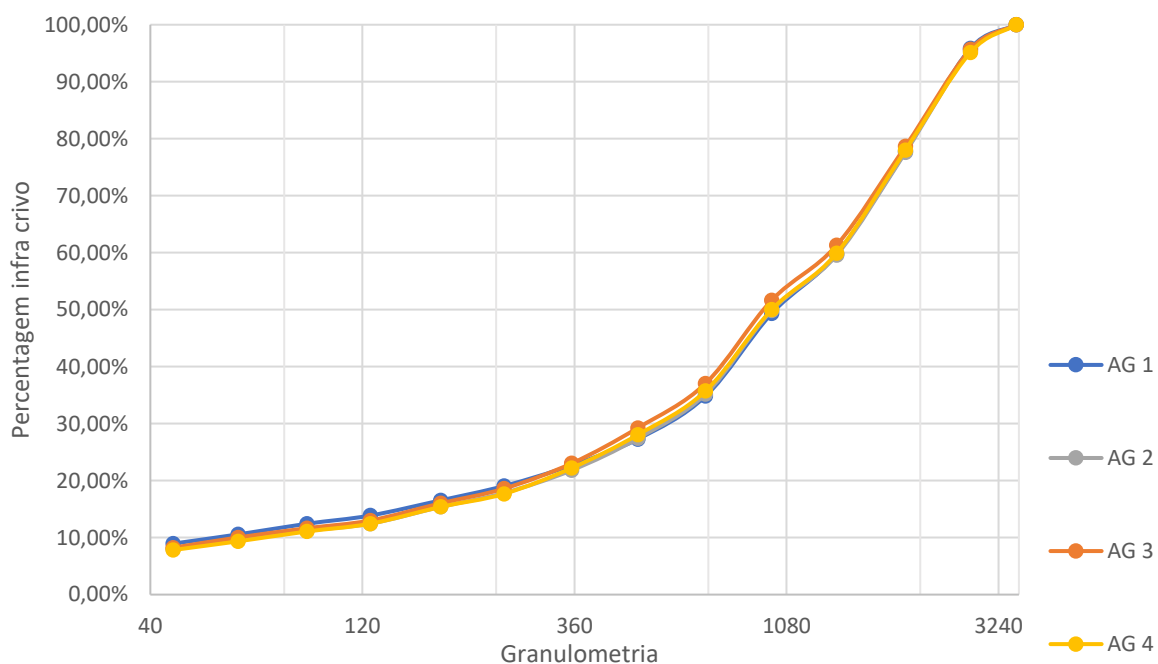


Figura 7 – Análise granulométrica de quatro amostras do material a ensaiar, PMR -3550 µm ou AMB, com o calibre em escala logarítmica

Como se pode observar na figura 7, as curvas granulométricas são quase idênticas e seguem uma mesma tendência. A média das perdas nas crivagens foi de 0,4134%.

Tendo em conta os resultados considerou-se que a amostragem foi bem realizada e que o erro da crivagem foi vestigial, estando dentro de limites aceitáveis.

Tabela 5 - Massa das amostras antes e depois de análise granulométrica

	Pré-análise (g)	Pós-análise (g)	Perdas (g)	Delta (%)
AG 1	466,11	464,26	1,85	0,40
AG 2	467,41	464,67	2,74	0,59
AG 3	473,9	471,97	1,93	0,41
AG 4	473,34	470,76	2,58	0,55

Tabela 6 - Resultados das análises granulométricas da amostra inicial e valor médio

Intervalos granulométricos (μm)	Replicações				AG médio
	1	2	3	4	(%)
	(%)	(%)	(%)	(%)	
-3550 +2800	4,16	4,56	4,32	4,87	4,48
-2800 +2000	18,06	17,84	17,02	17,13	17,52
-2000 +1400	18,03	18,04	17,35	18,10	17,88
-1400 +1000	10,40	9,71	9,66	9,90	9,92
-1000 +710	14,52	14,66	14,59	14,27	14,51
-710 +500	7,53	7,78	7,80	7,67	7,70
-500 +355	4,60	5,59	6,22	5,83	5,56
-355 +250	3,64	4,00	4,43	4,54	4,15
-250 +180	2,52	2,44	2,57	2,29	2,45
-180 +125	2,67	2,95	3,02	2,95	2,90
-125 +90	1,44	1,24	1,36	1,37	1,35
-90 +63	1,87	1,61	1,62	1,73	1,71
-63 +45	1,62	1,63	1,80	1,52	1,64
-45	8,94	7,97	8,23	7,82	8,24

Da análise granulométrica das amostras iniciais obtemos o valor médio das quatro distribuições granulométricas das AG's, que é um dos valores de entrada do método alternativo em análise no Capítulo 4. Estes valores apresentados na tabela 6 demonstram, por classe, um erro máximo de 1%, erro médio de 0,205 e um desvio padrão de 0,197% o que evidencia uma boa amostragem e um baixo erro nas crivagens.

3.3.3 Ensaio Cinético

Este ensaio foi realizado com o objectivo de obter as distribuições granulométricas de quatro tempos específicos de moagem, para usar posteriormente no Excel do método alternativo na estimação dos parâmetros cinéticos da moagem, necessários à criação do modelo cinético da moagem da rocha em questão. Baseou-se na moagem sistemática de cada uma das amostras, seguindo os tempos definidos. Os tempos escolhido foram meio minuto, um, dois e quatro minutos, de modo a descrever o melhor possível o comportamento do material dentro do moinho. Os produtos do moinho de bolas (PMB's) resultantes foram chamados de PMB, com o tempo (de moagem) em minutos à frente para os diferenciar.

O moinho de bolas utilizado foi um moinho de Denver, figura 8 direita, que devido à diferença de comprimento (ou espessura) para o moinho de Bond, foi necessário proceder aos devidos ajustes em relação à carga de bolas e ao volume de amostra por ensaio. As condições do estudo, massa e volume

das amostras a moer, massa das bolas, e as especificações do moinho usado estão presentes na tabela 7.

Tabela 7 – Especificações do moinho de Denver

D _m (cm)	30.48
L _m (cm)	12.7
V _{rot} , rpm	70
M _B , g	9060.51
Forro do moinho	Liso
Tipo de moagem	Seca
V _A , cm ³	291.67
M _A , g	466.67

A carga de bolas para este moinho também teve de sofrer as devidas alterações, pois o volume do moinho usado difere do moinho de Bond. A carga de bolas para o ensaio de Bond deve ter 20.125 kg e, usando a razão de redução do moinho de Bond para o moinho de Denver, que é de $\frac{5}{12}$, obtém-se uma carga de bolas teórica de 8.385 kg. Foi utilizada a carga de bolas, descrita na tabela 8, identificadas pelos diâmetros médios e presente na figura 8 esquerda, que apesar de não ter o peso teórico calculado, esta carga de bolas já tinha sido usada para trabalhos similares, o que facilitará possíveis comparações/correlações futuras com esses e outros trabalhos. É importante notar que as razões de aumento de escala não são lineares para a carga de bolas.



Figura 8 - Carga de bolas usada (esquerda) e um moinho de Denver aberto (direita)

Tabela 8 – Composição da carga de bolas utilizada no moinho de Denver

Diâmetro (mm)	Número de bolas	Peso (g)
48	4	1674.54
40	14	3155.10
30	28	2747.63
25	4	224.60
19	19	867.98
13,5	37	392.66
Total	117	9060.51

Usando os lotes de amostra AMB 1 a 4, anteriormente criados, começou por se introduzir as bolas no moinho, das maiores para as menores, depois a amostra espalhando-a e fechando bem o moinho. Moeu-se a amostra durante o tempo definido, e após a moagem o moinho e as bolas foram limpos, com o auxílio de pincéis para remover o material aderente. Todo o material foi pesado e guardado para posterior análise granulométrica. Este processo foi realizado para os 4 lotes, sendo que a única variável foi o tempo de moagem. Após a moagem, os lotes resultantes adquiriram os nomes de produto do moinho de bolas (PMB) 0,5, 1, 2 e 4, respectivamente. Estes produtos foram analisados granulometricamente (Figura 9) e guardados.

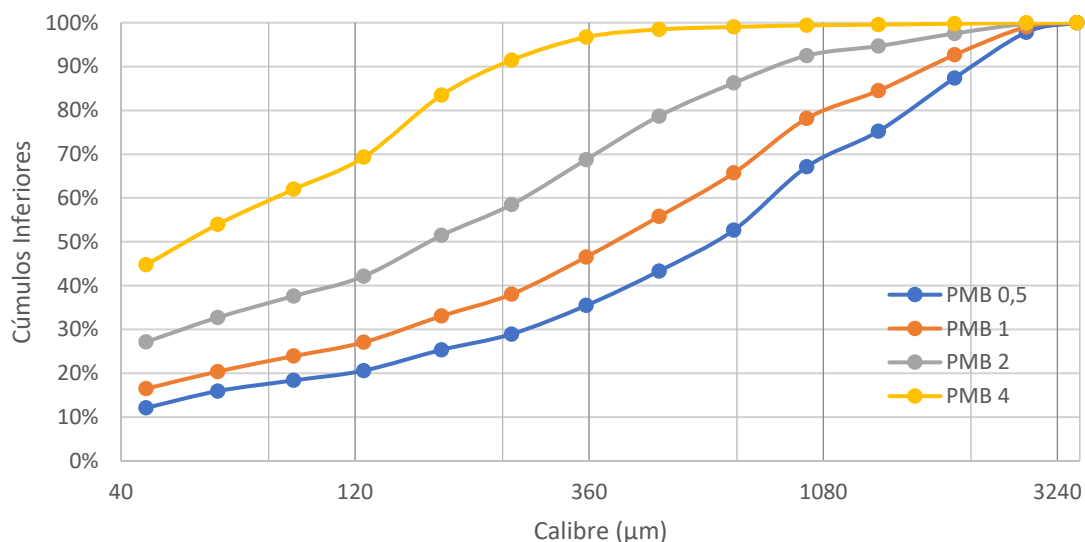


Figura 9 - Análise Granulométrica dos produtos do moinho de bolas do ensaio cinético, com o calibre em escala logarítmica

Atendendo que para o ensaio de Bond pretende-se obter uma carga circulante de 250%, isto quer dizer que das 466,67g de amostra, 133,33g serão infra 125 µm, ou seja, 28,57% infra 125. Na figura 9, pode observar-se que 28,57% infra 125 está entre as curvas do PMB 1 e 2, concluindo assim que o tempo de estabilização para o ensaio de Bond deve compreender-se entre 1 e 2 minutos, mais perto de um

minuto. Da análise das AG's, figura 7 e tabela 6, observa-se que a amostra inicial tem 12,94% de material infra 125, ou seja, só é necessário obter mais 15.63% de infra 125.

Tabela 9 - Distribuição granulométrica dos PMB's

Intervalos granulométricos (μm)		PMB 0,5 (%)	PMB 1 (%)	PMB 2 (%)	PMB 4 (%)
-3550	+2800	2,20	0,97	0,26	0,04
-2800	+2000	10,42	6,38	2,21	0,21
-2000	+1400	12,12	8,15	2,89	0,22
-1400	+1000	8,12	6,36	2,20	0,15
-1000	+710	14,45	12,43	6,28	0,39
-710	+500	9,35	9,92	7,59	0,57
-500	+355	7,87	9,25	9,99	1,80
-355	+250	6,52	8,50	10,26	5,25
-250	+180	3,60	4,98	7,00	7,99
-180	+125	4,73	5,98	9,26	14,15
-125	+90	2,23	3,17	4,52	7,30
-90	+63	2,45	3,51	4,89	7,99
-63	+45	3,82	3,93	5,58	9,22
-45		12,11	16,48	27,07	44,73

Deste ensaio retira-se outro conjunto de valores de entrada para o método alternativo que se pretende analisar nesta tese: as distribuições granulométricas dos PMB's 0,5 a 4, tabela 9.

3.3.4 Ensaio de Bond

Usando o lote de amostra AMB 5, nas mesmas condições de moagem do ensaio cinético, foi definido o crivo teste, MOG, de 125 μm e, tendo em consideração as conclusões do subcapítulo anterior, definiu-se o tempo inicial deste ensaio em dois minutos para garantir que o tempo óptimo seria inferior. O objectivo deste ensaio é atingir uma carga circulante de 250%, ou seja, 28,57% de material infra 125 após a conclusão do ensaio. Para este fim o produto de cada ciclo foi crivado a seco no crivo teste, o produto infra foi retirado, pesado e comparado com o valor objectivo, ao produto supra foi adicionado material AMB em quantidade suficiente para refazer aproximadamente as 466.67g, e iniciou-se com esse material o ciclo seguinte fazendo os devidos ajustes ao tempo de moagem. Na figura 10 pode observar-se um esquema desta metodologia.

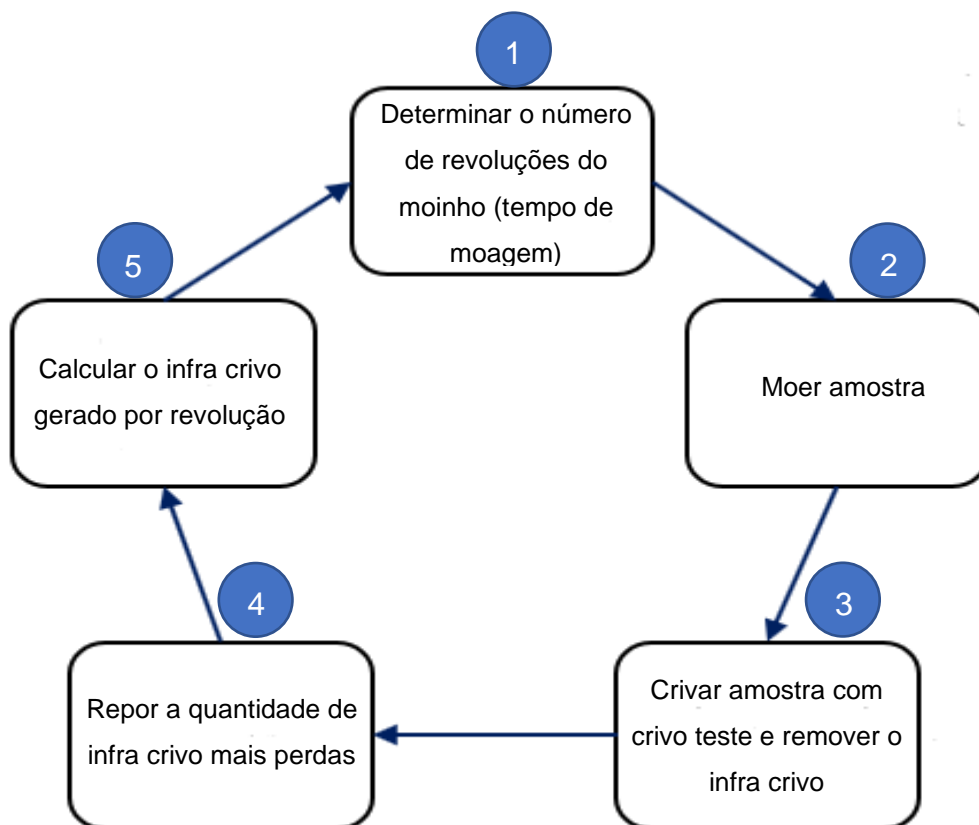


Figura 10 - Resumo esquemático da metodologia empírica de Bond

É importante referir que as recargas de material AMB foram também preparadas com sucessivas divisões em divisor de Jones. Quando o material infra 125 ultrapassava o objectivo, reduzia-se o tempo de moagem, ou o inverso quando obtínhamos material infra 125 abaixo do valor pretendido. A adição de material, entre ciclos encadeados de Bond, representa o produto infra mais as perdas inerentes ao ensaio. Ao final de onze ciclos, tabela 10, considerou-se atingida a estacionaridade e, após crivagem a seco com o crivo teste, concluiu-se o ensaio de Bond.

Tabela 10 - Descrição ciclo a ciclo do Ensaio de Bond

Amostra	Peso	Tempo de Moagem (min:seg)	Revoluções	Peso pós-moagem	125	-125	Carga Circulante	Recarga
PMB 5	466,45	02:00	140,00	461,77	264,69	196,87	134,45%	202,12
PMB 5.1	466,84	01:00	70,00	464,45	338,93	125,00	271,14%	127,60
PMB 5.2	466,55	01:15	87,50	462,66	338,34	124,06	272,72%	127,38
PMB 5.3	465,74	01:30	105,00	463,26	308,58	154,31	199,97%	158,19
PMB 5.4	466,80	01:15	87,50	463,67	331,4	132,01	251,04%	135,27
PMB 5.5	466,65	01:15	87,50	464,42	325,87	138,15	235,88%	141,35
PMB 5.6	467,22	01:10	81,67	463,86	334,84	128,19	261,21%	131,75
PMB 5.7	466,59	01:12	84,00	463,90	335,96	126,82	264,91%	131,08
PMB 5.8	467,04	01:13	85,17	463,53	338,39	124,50	271,80%	129,42
PMB 5.9	467,81	01:15	87,50	465,64	330,76	134,24	246,39%	135,83
PMB 5.10	466,59	01:14	86,33	463,19	331,78	130,69	253,87%	

Como se pode observar na tabela 10, foi extremamente complicado manter um tempo fixo e obter a carga circulante pretendida. Deu-se o ensaio por terminado sem fazer as três repetições estáveis do mesmo tempo, pois como se pode observar nos ciclos PMB 5.4, PMB 5.5 e 5.9 a estabilização do tempo de moagem pode não ser possível para este ensaio num moinho de Denver. No entanto, como se faz uma média dos três últimos valores, como é aconselhado em grande parte da bibliografia (Austin et al., 1984), isto também não representa um grande constrangimento, podendo também conferir que a média das três ultimas cargas circulantes dá 257% assumindo assim um erro ínfimo e desprezável. Em todo o caso, foram obtidos bons resultados para o objectivo de 250% de carga circulante, uma vez que os valores se aproximaram do esperado. Deste ensaio foi possível concluir que não é fácil obter uma estabilização de valores para estas condições, pelo que dificilmente se conseguiria obter valores melhores. Analisando este ensaio é possível concluir que a estabilização num moinho de Bond seria mais fácil, uma vez que a quantidade de amostra seria maior.

Após o ensaio, foi feita uma análise granulométrica dos produtos infra e supra 125 µm resultantes do último ciclo, cujas curvas granulométricas podem ser vistas na figura 11.

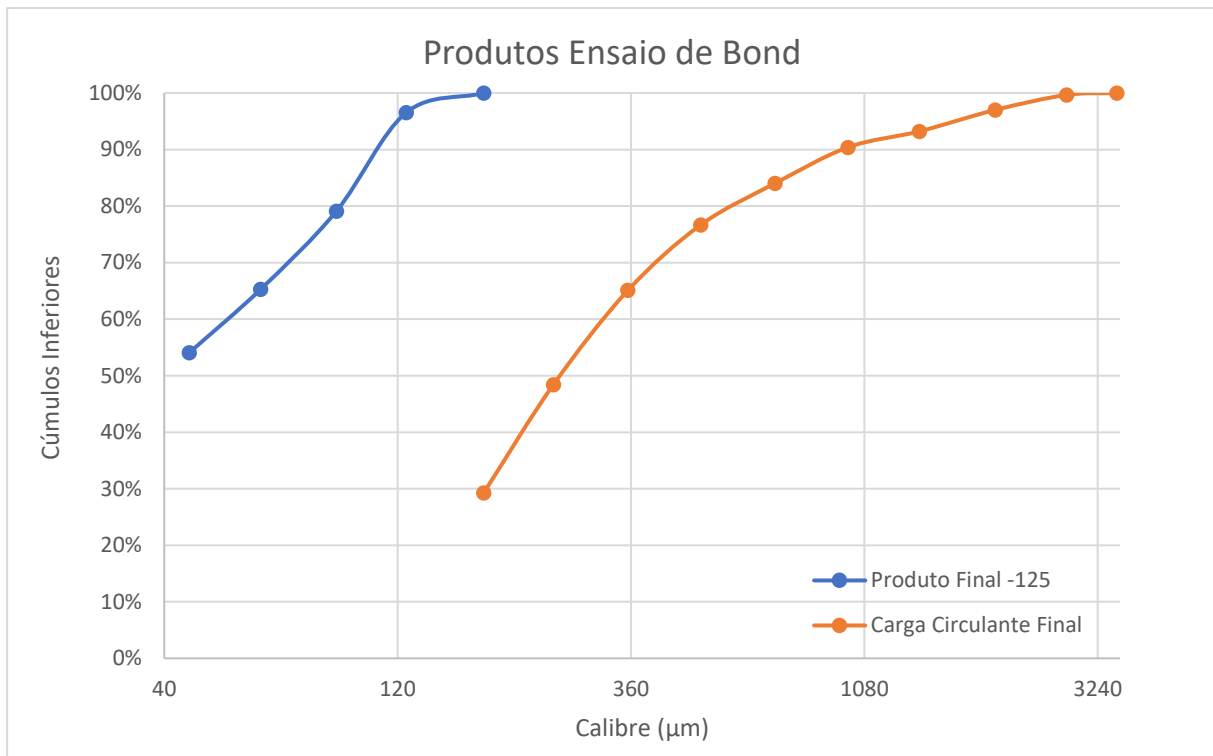


Figura 11 – Análise granulometria dos produtos do ensaio de Bond, com o calibre em escala logarítmica

Ao longo deste ensaio a média das perdas na moagem foi de 0.654% e a média das perdas na crivagem foi de 0.113%.

Capítulo 4 – Modelação, Resultados e Discussão dos mesmos

A modelação presente neste trabalho é feita recorrendo a dois ficheiros Excel. Os ficheiros são visualmente iguais mudando apenas o modelo matemático usado: num recorre-se ao modelo de Austin, Klimpel & Luckie, 1984 (que para simplificar se designará por AKL), e no outro é usada uma versão desse mesmo modelo, mas revisto e modificado por R.P. King, 2001 (identificado por RPK). Os dois ficheiros fazem o mesmo, através de modelos parecidos, sendo o modelo de RPK uma evolução do modelo AKL habitualmente fornece melhores resultados. Tendo em consideração que ambos os ficheiros são de igual utilização e funcionamento, a descrição de um é válida para o outro também.

O Excel usado está escrito em inglês e subdivide-se em duas partes: a primeira parte, que comprime toda a informação necessária à criação e validação do modelo matemático da cominuição em moinho de bolas através da cinética de moagem e a segunda parte, que consiste na simulação do método de Bond.

Os dados necessários à utilização do software são os resultados dos ensaios laboratoriais descrito no Capítulo 3, as distribuições granulométricas do AMB ou PMR -3550, e dos PMB's.

Foram testados três tipos de função objectivo - Soma dos Quadrados dos Resíduos (SSR), Soma dos Resíduos Relativos Absolutos (SARR) e Soma Ponderada dos Quadrados dos Resíduos (WSSR) para cada um dos modelos matemáticos usando 3 e 4 tempos do ensaio cinético. A selecção do modelo, função objectivo e tempos do ensaio cinético baseou-se na qualidade do ajuste gráfico da distribuição simulada aos valores medidos e avaliando também a análise dos resíduos através dos testes Qui-Quadrado e Kolmogorov-Smirnov. Devido à repetição dos nomes dos modelos, funções objectivo usadas e número de tempos do ensaio cinético usados, adoptou-se uma abreviação. Cada teste do Excel é nomeado pela sigla do modelo usado, seguido da sigla em inglês para a função objectivo e por último o número de tempos do ensaio cinético usados, por exemplo AKL SSR 3, para referir que foi utilizado o método de Austin, Klimpel & Luckie com a função objectivo Soma do Quadrado dos Resíduos (Square Sum Residuo) e contemplando os três primeiros tempos do ensaio cinético para a modelação.

Este capítulo começa então com uma apresentação esquemática dos ciclos encadeados do ensaio de Bond para um moinho de bolas, figura 12, seguido da apresentação do algoritmo de simulação numérica da metodologia empírica de Bond, figura 13, e por fim a simbologia das figuras 12 e 13 presente na tabela 11. O algoritmo presente na figura 13 foi-me dado pelo meu orientador Prof. Fernando Durão e é usado no Excel em análise para o cálculo da moabilidade de Bond simulada (U_b na figura) que depois é usado para o cálculo do índice de energia simulado. Depois inicia-se a apresentação da utilização do software, a passo com os resultados obtidos, que finaliza com a comparação do resultado da metodologia em análise com o resultado de uma metodologia alternativa em paralelo com o resultado laboratorial.

Tabela 11 - Simbologia das figuras 12 e 13

<p>MillRev - V_{rot} – Velocidade de rotação</p> <p>n – Número de classes/intervalos</p> <p>MOG – Calibre da malha do crivo teste</p> <p>$\varphi_{80}^A - \varphi_{80}^F$ – módulo de calibre 80% passante da alimentação do moinho, em regime estacionário (μm)</p> <p>φ_{80}^P – Módulo de calibre 80% passante do produto do moinho de bolas, em regime estacionário (μm)</p> <p>k – índice do ciclo</p> <p>t_k – Tempo de moagem (minutos) do ciclo k</p> <p>$NF^{(k)}$ – Nova alimentação (g) para o ciclo k</p> <p>$nf^{(k)}$ – Composição granulométrica da nova alimentação (fracção de massa $nf_j^{(k)}$, $j=1,2,\dots,n$)</p> <p>f^- – Fracção da massa infra crivo teste</p> <p>$CL^{(k)}$ – Carga circulante (g) para o ciclo k</p> <p>$cl^{(k)}$ – Composição granulométrica da carga circulante (fracção de massa $cl_j^{(k)}$, $j=1,2,\dots,n$)</p> <p>$O^{(k)}$ – Supra crivo teste (g) no ciclo k</p> <p>$o^{(k)}$ – Composição granulométrica do supra crivo (fracção de massa $o_j^{(k)}$, $j=1,2,\dots,n$)</p>	<p>\bar{U}_b – Infra crivo (g) gerado em regime estacionário por revolução do moinho ($\bar{U}_b = \bar{U}(1 - f^-)$)</p> <p>$U_b^{(k)}$ – Infra crivo (g) gerado no ciclo k por revolução do moinho</p> <p>$U^{(k)}$ – Infra crivo (g) no ciclo k</p> <p>$u^{(k)}$ – Composição granulométrica do infra crivo (fracção de massa $u_j^{(k)}$, $j=1,2,\dots,n$)</p> <p>MF – Alimentação do moinho para o ciclo k ($MF = \overline{MF}$ constante)</p> <p>$mf^{(k)}$ – Composição granulométrica da alimentação do moinho (fracção de massa $mf_j^{(k)}$, $j=1,2,\dots,n$)</p> <p>MP – Produto do moinho (g) no ciclo k ($MP = MF$)</p> <p>$mp^{(k)}$ – Composição granulométrica do produto do moinho (fracção de massa $mp_j^{(k)}$, $j=1,2,\dots,n$)</p> <p>$\Phi(t_k)$ – Matriz de transferência de moagem em moinho de bolas (<i>batch</i>) para o tempo t_k (Matriz triangular inferior)</p> <p>C – Matriz de classificação da operação de crivagem (matriz diagonal)</p>
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

4.1 Selecção do Melhor Ajuste com recurso ao Excel

Na Parte 1 do Excel, introduzindo a média da análise granulométrica das amostras (AG's) e os produtos do ensaio cinético (PMB's), é gerada uma matriz da distribuição granulométrica simulada para cada tempo de moagem do ensaio cinético e uma matriz de erros, através do modelo matemático em utilização com base nas equações de Austin et al., (1984), equação 2.12. Com a modelação do ensaio cinético feita, pode-se escolher na célula 'No. Of tests' o número de produtos do ensaio cinético que se pretende usar no ajuste dos parâmetros do modelo cinético. Estes passos vêm assinalados no Excel

com um número 1 a branco num círculo preto, anexo 1. De seguida tem de se escolher uma de três funções para a função objectivo e, através de dois botões, debaixo das tabelas ao lado dos números 2 e 3, activam sequencialmente duas macros. A primeira, assinalada pelo número 2, ajusta os parâmetros cinéticos da moagem em circuito fechado recorrendo a uma ferramenta do Excel chamada Solver. Este ajuste começa como um problema de optimização restrito não linear, com vista à minimização da função objectivo seleccionada. Tendo em consideração as restrições existentes (já introduzidas no Solver), corre como um processo iterativo e utiliza uma função gradiente reduzido generalizado não linear. Esta ferramenta do Excel informa-nos se foi obtida uma solução óptima ou se a solução foi obtida por convergência através de duas células, uma com o nome 'Solver Info' e outra com um número 0 se óptima ou 1 se a solução foi por convergência (à frente de 0 ou 1 aparece uma linha de texto que diz o significado do número). O botão por baixo da tabela assinalado pelo número 3 calcula o desvio padrão dos parâmetros estimados.

Primeiramente, começou por se ver qual seria a função objectivo que melhor se ajustava a cada variação do modelo, ou seja, para o modelo AKL, com 4 tempos do ensaio cinético, qual seria a função objectivo que nos iria fornecer o melhor ajuste. Este procedimento foi repetido para o AKL com três tempos, RPK quatro e três tempos também. Desta primeira avaliação concluímos que a função objectivo SSR, soma do quadrado dos resíduos, proporciona o melhor ajuste aos nossos dados, independentemente das alterações. Sabendo isto, foi verificado para cada modelo se seria melhor utilizar três ou quatro tempos do ensaio cinético fixando a função objectivo SSR.

Os gráficos seguintes são dados pelo Excel, página 'Modal Validation', e mostram as distribuições granulométricas cumulativas simuladas $P(t)$ e os valores medidos em laboratório $PM(t)$, sendo t o tempo de permanência do material no moinho. Ora, um bom ajuste será quando a linha $P(t)$ intersecta ou se aproxima dos valores $PM(t)$, para o mesmo t . Como podemos observar nas figuras 14 e 15, os valores simulados $P(t)$ seguem a tendência dos valores $PM(t)$ mas aproximam-se mais dos valores quando são usados apenas três tempos do ensaio cinético, figura 15. Isto pode dever-se ao facto de, como observado no capítulo anterior, quatro minutos de moagem ser um tempo exagerado para um ensaio de Bond nas condições em análise, sendo que o tempo de estabilização rondou o um minuto e quatorze segundos, valores acima dos dois minutos vão enviesar negativamente o ajuste. O mesmo foi observado paralelamente ao comparar os resultados do modelo RPK SSR 3 e 4, mas com diferenças mais subtis, valores que não apresento nesta tese porque este estudo não iria alterar nenhuma das conclusões deste trabalho.

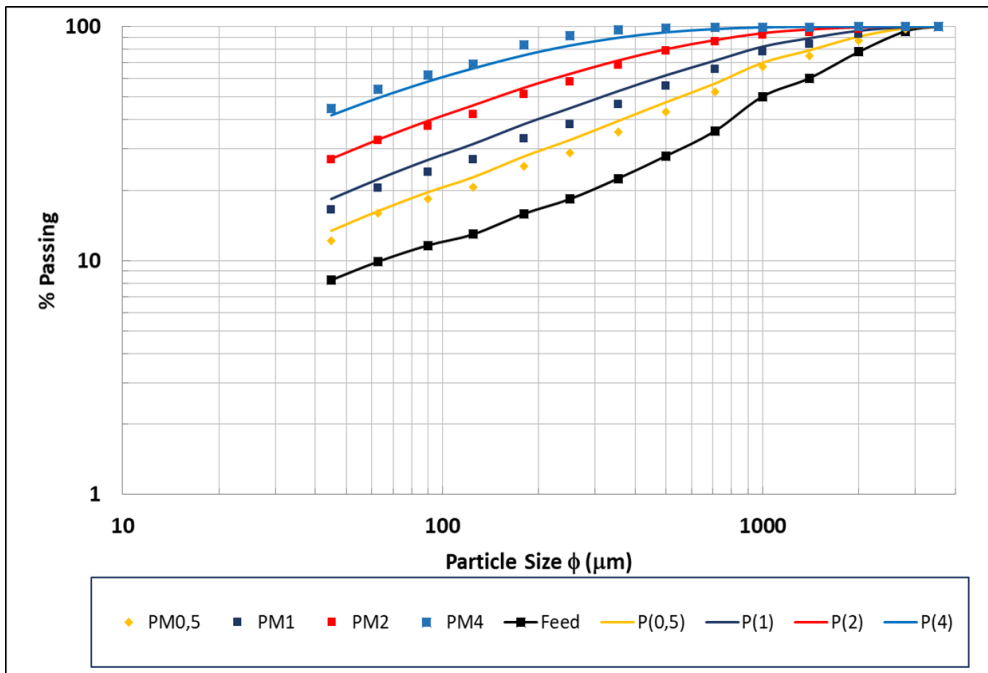


Figura 14 - Representação gráfica dos resultados experimentais e dos simulados pelo modelo AKL SSR 4

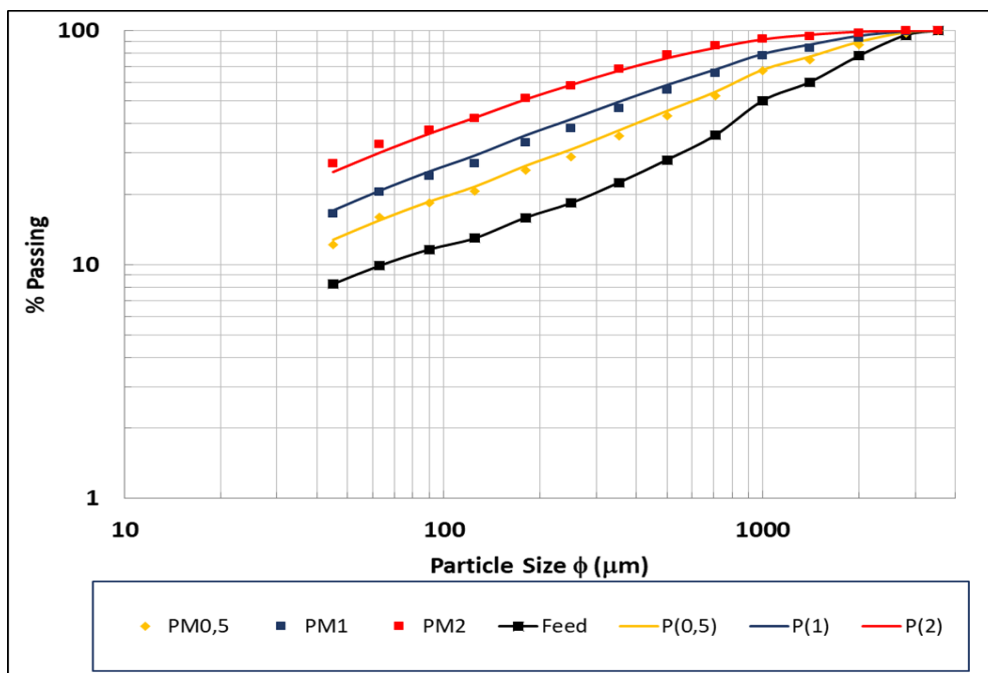


Figura 15 - Representação gráfica dos resultados experimentais e dos simulados pelo modelo AKL SSR 3

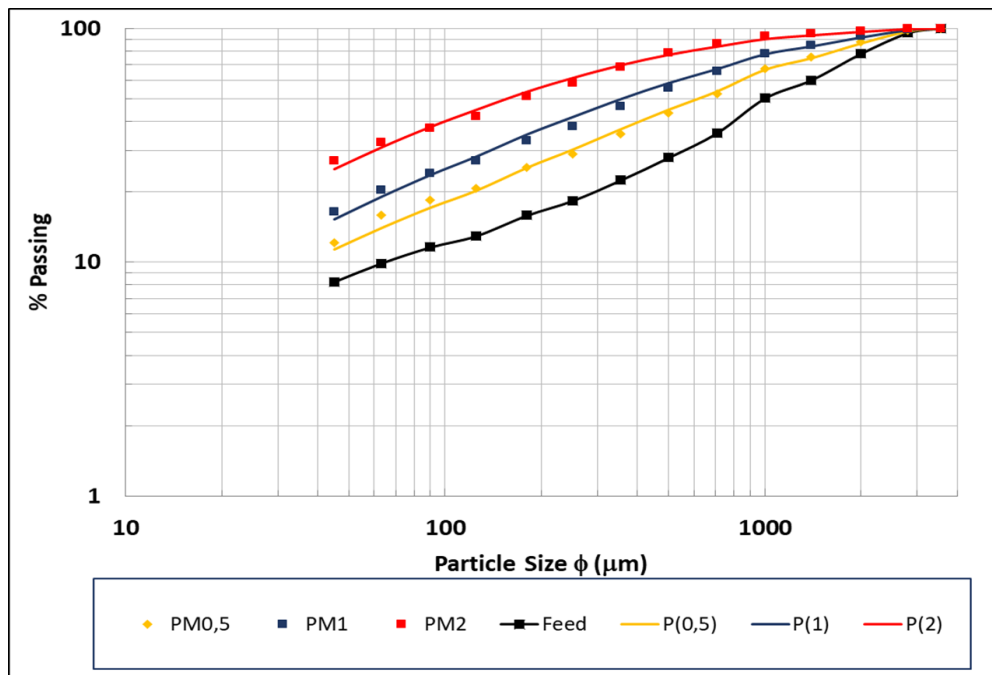


Figura 16 - Representação gráfica dos resultados experimentais e dos simulados pelo modelo RPK SSR 3

Obtendo melhores valores quando para os 3 primeiros tempos do ensaio cinético, prosseguiu-se à comparação entre os modelos AKL SSR 3 (figura 15) e RPK SSR 3 (figura 16) com a função objectivo SSR e para três tempos do ensaio cinético já verificados como os melhores para cada modelo.

As diferenças entre as figuras 15 e 16 são pouco notórias pelo que se torna mais simples comparar a análise de resíduos de ambos os modelos.

4.2 Análise dos Resíduos

Após o ajuste de modelos, procedeu-se à análise dos resíduos pelos métodos do Qui-Quadrado e de Kolmogorov-Smirnov que podem ser encontradas nos separadores 'Resíduos (I)' e 'Resíduos (II)' do Excel. A análise dos resíduos é importante para validar o ajuste do modelo e, se este for validado, esta análise confere fiabilidade aos resultados.

Os resíduos são a diferença entre os valores reais e os valores simulados. Como o resíduo é um erro de estimação, para que o modelo seja preciso o valor esperado deve ser ou tender para zero.

De um ponto de vista comparativo entre o modelo AKL e RPK, o melhor ajuste será aquele cujos resíduos se aproximem mais de uma distribuição normal (0,1), com valor médio de zero e desvio padrão de um.

4.2.1 Teste do Qui-Quadrado

O teste do qui-quadrado é um teste estatístico não paramétrico aplicado a dados categóricos que avalia a probabilidade das diferenças observadas serem aleatórias. Neste caso, pretende-se demonstrar que os resíduos seguem uma distribuição normal: se o χ^2 for menor que o χ^2_{crit} e o valor-p superior ao nível de significância 0,05 então a hipótese em teste verifica-se e por consequência prova-se a aleatoriedade dos resíduos. Na figura 17 à esquerda pode observar-se a média e o desvio padrão (s) dos resíduos do AKL SSR 3, e à direita os dados do histograma da figura 18 e as estatísticas de teste do Qui-quadrado.

ϕ (μm)	RESIDUES		
3550	0,434	0,268	0,151
2800	1,763	2,159	1,239
2000	-0,165	0,236	-0,062
1400	-1,161	-1,239	-2,011
1000	1,139	1,077	-1,029
710	-0,069	0,239	-0,596
500	0,080	0,422	1,216
355	-0,012	0,517	1,269
250	-0,998	-1,145	-0,777
180	-0,143	-0,417	0,939
125	-0,709	-1,088	-1,648
90	-0,648	-0,785	-1,273
63	1,116	0,273	0,345
45	-0,625	-0,516	2,236

Mean	0,000
s	1,015

Histogram data			
Bin	NObs	%	NExp
]- ∞ , -3[0	0,00	0,06
[-3, -2[1	2,38	0,90
[-2, -1[7	16,67	5,71
[-1, 0[14	33,33	14,34
[0, +1[11	26,19	14,34
[+1, +2[7	16,67	5,71
[+2, +3[2	4,76	0,90
[+3, ∞ [0	0,00	0,06
	42	100,00	42,00

Goodness of fit test - Chi-square test

χ^2 2,84
p-value 8,99E-01
 χ^2_{crit} 14,07

Figura 17 – Resultados da página 'Residues l' para o AKL SSR 3. À esquerda a tabela dos resíduos e à direita a tabela de frequências dos erros

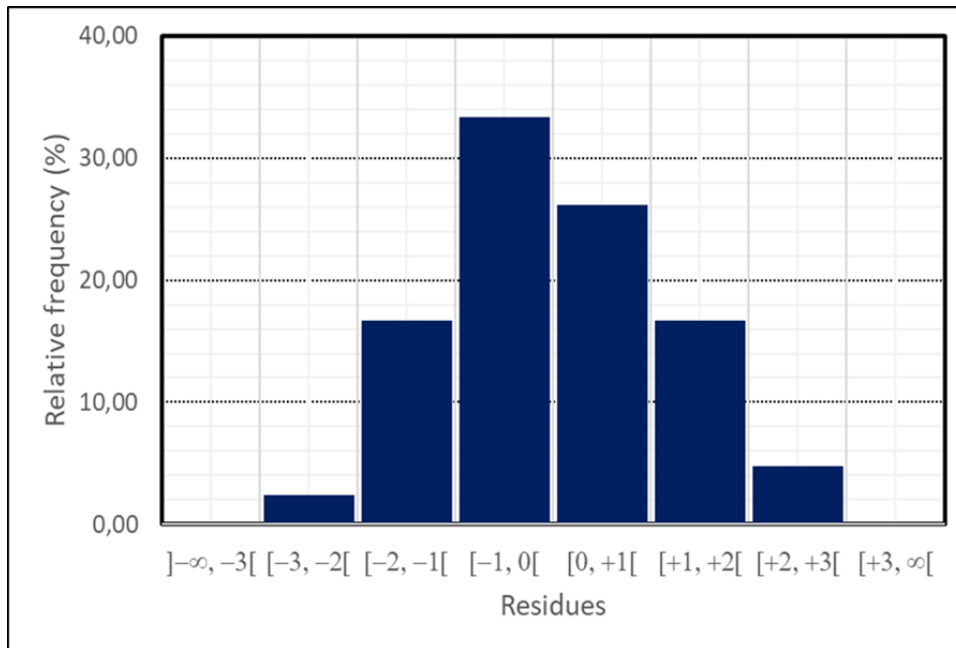


Figura 18 - Histograma da frequência dos erros para o AKL SSR 3

Sendo o χ^2_{Crit} o menor valor da região de rejeição, o χ^2 o resultado da estatística de teste e o valor-p representa o nível de significância máximo para a aceitação da hipótese nula. Outra característica do valor-p é que quanto menor for o seu valor, maior é a evidência contra a hipótese nula, ou seja, a estatística de teste é menos consistente que outra com um valor-p maior. Na figura 19 à esquerda pode observar-se a média e o desvio padrão (s) dos resíduos do RPK SSR 3, e à direita os dados do histograma da figura 20 e as estatísticas de teste do Qui-quadrado.

ϕ (μm)	RESIDUES		
3550	-0,546	-0,720	-0,377
2800	-0,427	-0,340	-0,365
2000	0,414	0,507	-0,356
1400	0,027	0,072	-1,270
1000	1,719	1,967	-0,056
710	0,417	1,257	1,083
500	0,058	0,754	2,493
355	-0,325	0,305	1,915
250	-1,346	-1,605	-0,775
180	-0,393	-0,897	0,527
125	-0,871	-1,530	-2,404
90	-0,688	-1,090	-2,124
63	1,181	0,157	-0,349
45	0,780	1,163	2,056

Histogram data			
Bin	NObs	%	NExp
]-∞, -3[0	0,00	0,06
[-3, -2[2	4,76	0,90
[-2, -1[5	11,90	5,71
[-1, 0[15	35,71	14,34
[0, +1[11	26,19	14,34
[+1, +2[7	16,67	5,71
[+2, +3[2	4,76	0,90
[+3, ∞[0	0,00	0,06
Total	42	100,00	42,00

Goodness of fit test - Chi-square test

χ^2 4,00
p-value 7,80E-01
 χ^2_{Crit} 14,07

Mean	0,000
s	1,137

Figura 19 - Resultados da página 'Residues I' para o RPK SSR 3. À esquerda a tabela dos resíduos e à direita a tabela de frequências dos erros

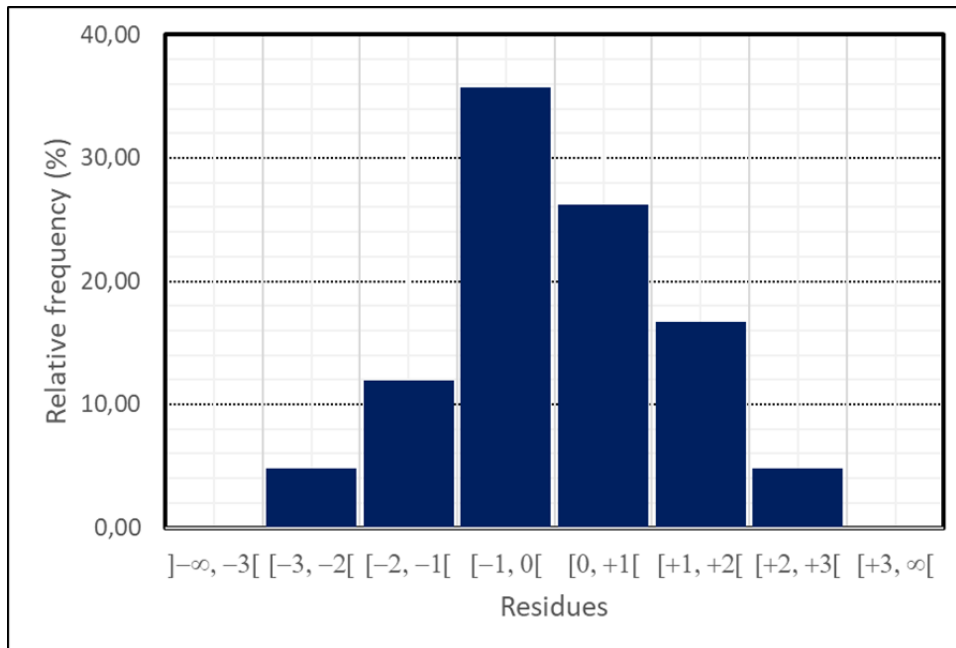


Figura 20 - Histograma da frequência dos erros para o RPK SSR 3

Analisando os resultados de ambos os modelos observamos que ambos verificam a hipótese em análise, ou seja, a distribuição dos resíduos é casual pois os valores estão na região de aceitação e são consistentes com uma distribuição normal. Apesar de ambos apresentarem bons valores, o AKL SSR 3 apresenta valores melhores, pelo que, será considerado o modelo que melhor se ajusta aos dados obtidos. Com χ^2 de 2,84, χ^2_{crit} de 14,07 e valor-p de 0,899 pode-se afirmar que a distribuição dos resíduos é ao acaso e assemelha-se a uma distribuição normal que descreve a margem de erro da estimação em análise.

4.2.2 Teste de Kolmogorov-Smirnov

O teste estatístico de Kolmogorov-Smirnov é um teste não paramétrico sobre a igualdade de distribuições de probabilidade contínuas e unidimensionais que pode ser usado para comparar uma amostra com uma distribuição de probabilidade de referência (teste K-S uniamostrais). A estatística de Kolmogorov-Smirnov quantifica a distância entre a função distribuição empírica da amostra e a função distribuição acumulada da distribuição de referência. A distribuição nula desta estatística é calculada sob a hipótese nula de que a amostra é retirada da distribuição de referência. As distribuições consideradas sob a hipótese nula são distribuições contínuas, mas não restritas.

Aplicando este teste estatístico, pretende-se testar se a amostra obtida em laboratório poderia ter sido tirada do modelo matemático gerado. Se assim for pode afirmar-se que o modelo é bom e representativo dos ensaios laboratoriais. A função de distribuição de referência é a distribuição normal, e verificando a hipótese nula, prova-se que a qualidade do ajuste do modelo matemático gerado.

Na figura que se segue, figura 21, pode-se observar um gráfico de probabilidade cumulativa versus resíduos do modelo AKL SSR 3, com os dados da distribuição empírica (traços a azul) e da distribuição teórica (a curva e os pontos a laranja), avaliando visualmente a sua proximidade e tendência similar. O objectivo deste gráfico é avaliar e quantificar a distância entre as duas.

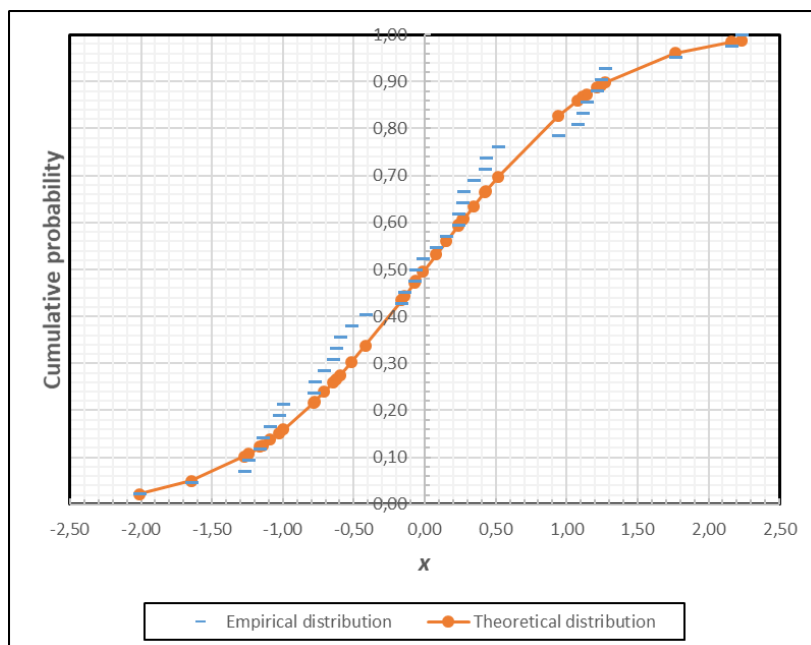


Figura 21 - Probabilidade cumulativa do erro vs erro de estimação

Este teste permite o cálculo da distância vertical máxima entre as distribuições empírica e teórica, que é $D_{\max}=0,0814$. O valor crítico para este teste é obtido usando a fórmula correcta da figura 22 abaixo para $\alpha=0,05$ e $n=42$, que resulta em 0,2098. Como $D_{\max} < \text{Valor crítico}$, a hipótese de que os resíduos seguem uma distribuição de probabilidade normal é aceite.

Para $n>40$ os valores críticos de D_n podem ser aproximados pelas seguintes expressões:

α				
0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
$\frac{1.07}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.52}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{n}}$

Figura 22 - Fórmulas para o cálculo do valor crítico para o teste estatístico de Kolmogorov-Smirnov (fonte: www.estgv.ipv.pt/PaginasPessoais/lucas/material/Tabela_K-S.pdf)

Da análise dos Resíduos I e II do Excel, conclui-se que o modelo que melhor se ajusta é o AKL, com os três primeiros tempos do ensaio cinético e usando a função objectivo SSR. Pode-se dizer com 95% de confiança que os resíduos resultam de forma aleatória, com uma distribuição de probabilidade normal (0,1), aproximadamente, o que afirma uma boa qualidade do ajuste do modelo aos dados empíricos obtidos.

O método de Kapur tem a particularidade de ser necessário utilizar uma ferramenta do Excel para minimizar o resíduo, presente no separador Dados e chamada de Análise de Hipóteses → Atingir Objectivo, Figura 24, para ajustar o G2, obtendo assim um resíduo perto ou igual a zero. É importante referir que os valores utilizados no Método de Kapur são os mesmos que usados no método experimental, mas convertidos para valores do moinho de Bond.

R1	646,99
r	0,871
M1	1119,5
t1	140
G1	0,002928162
R2	819,48
t2	70
G2	0,003655375
Residuo	4,04E-07
Gbp	3,563
WI	6,73

Atingir objetivo ? X

Definir a célula: ↑

Para o valor:

Por alteração da célula: ↑

Figura 24 - Operação de minimização do resíduo (célula N21) do cálculo do WI pelo método de Kapur, por alteração do valor de G2 (célula N20)

Nesta página do Excel há espaço para dois ensaios experimentais, mas foi apenas realizado um no decorrer deste trabalho. Após finalizado o cálculo do BWi experimental, passa-se para a página do Excel 'Simulated Bond test', anexo 6, onde através do modelo matemático escolhido e validado anteriormente, foi simulado um ensaio recorrendo à fórmula 2.12. Para esta simulação, foi necessário preencher as células a verde presentes na página do Excel "Simulated Bond Test", anexo 6, com os devidos valores convertidos para moinho de Bond, figura 25. É de notar que esta página não tem qualquer ligação com a página 'Experimental Bond Tests', ambas são independentes.

MillFeed	1120,008 g	Feed undersize	12,94 %	Initial time (min)	2 min.
Mesh_of_grinding	125 um	New undersize	278,59 g	Tolerance	1 g
Steady State New Feed	320,00 g				

Oversize 799,94 g

Oversize (g)	Oversize (%)	Size Composition of New Feed	Cumulative mill feed (%)	Size Composition of Mill Feed (%)	Mill Feed (g)	Composition of Mill Product (%)	Oversize (%)	Oversize (g)	Undersize (%)	Undersize (g)
1,00	0,12	3550 4,477	0,000	1,37	15,32	0,089	0,12	0,99	0,00	0,00
7,64	0,96	2800 17,516	4,477	5,69	63,71	0,680	0,95	7,62	0,00	0,00
20,47	2,56	2000 17,881	21,993	6,94	77,70	1,816	2,54	20,33	0,00	0,00
29,21	3,65	1400 9,918	39,873	5,44	60,95	2,567	3,59	28,75	0,00	0,00
55,98	7,00	1000 14,511	49,791	9,14	102,42	4,865	6,81	54,49	0,00	0,00
76,39	9,55	710 7,697	64,301	9,02	101,02	6,554	9,17	73,40	0,00	0,00
105,18	13,15	500 5,560	71,996	10,98	122,98	9,043	12,66	101,28	0,00	0,00
140,03	17,50	355 4,152	77,556	13,69	153,32	12,272	17,18	137,45	0,00	0,00
157,91	19,74	250 2,454	81,709	14,80	165,76	14,296	20,01	160,11	0,00	0,00
201,96	25,25	180 2,895	84,163	18,86	211,23	18,893	26,44	211,60	0,00	0,00
3,87	0,48	125 1,352	87,059	0,73	8,19	5,138	0,48	3,86	16,79	53,68
0,29	0,04	90 1,707	88,410	0,51	5,76	4,564	0,04	0,29	15,89	50,83
0,02	0,00	63 1,641	90,116	0,47	5,27	3,627	0,00	0,02	12,70	40,61
0,00	0,00	45 8,241	91,759	2,36	26,38	15,598	0,00	0,00	54,62	174,70
799,94	100,00		100,000	100,00	1120,01	100,000	100,00	800,20	100,00	319,81

Figura 25 - Primeira parte da tabela de simulação de Bond com dados iniciais na parte superior da figura

Após preenchidas as devidas células, prosseguiu-se para o passo 5 do Excel, a simulação dos ciclos encadeados de Bond, figura 22. O modelo matemático ajustado no início do Excel é agora usado para prever/simular a distribuição granulométrica do produto para um dado tempo de moagem, e a operação de crivagem é modelada por uma função simples de Rosin-Rammler para descrever a curva de partição respeitante ao produto supra crivo. Do ponto de vista do utilizador do Excel, consiste em carregar no botão 'start simulation' para obter um primeiro ciclo (figura 26 – tabela 'Bond Test History'), e em seguida carregar no botão 'continue simulation', que simula mais um ciclo sempre que accionado. A simulação deve terminar ao ser atingida a convergência, assinalado no canto superior esquerdo da figura 26, 'Convergence' 'Yes'. Quando satisfeitos com o número de ciclos, pode observar-se numa tabela, canto inferior esquerdo da figura 26, os valores de ϕ_{80}^A , ϕ_{80}^P e W_i ou BW_i simulado.

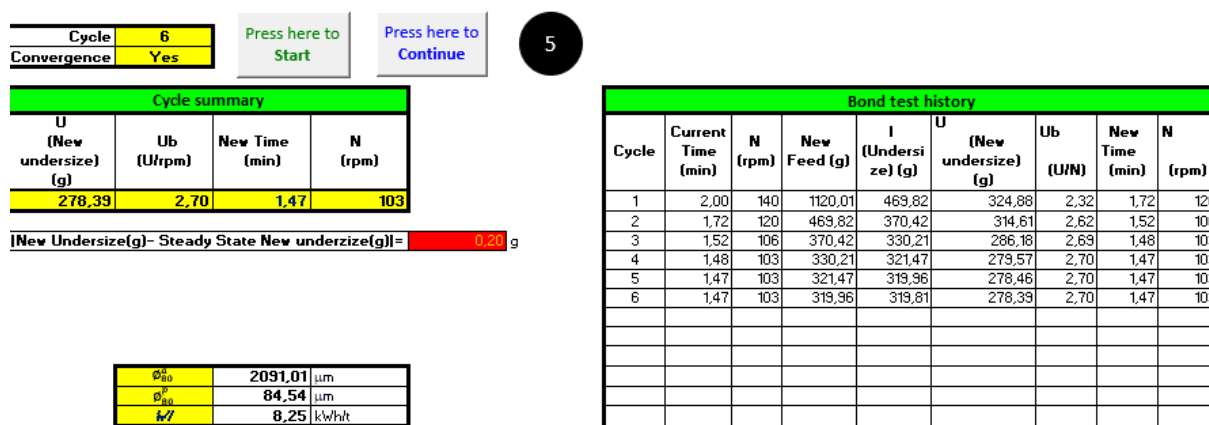


Figura 26 - Segunda parte da tabela de simulação de Bond, com o histórico de cada ciclo e o W_i simulado

Em paralelo com os resultados simulados também é usado o método simples de Kapur como método alternativo para os valores simulados, tabela 12, onde à semelhança da figura 24 é necessário realizar a operação de minimização dos resíduos.

Tabela 12 - Método de Kapur aplicado aos dados simulados

Kapur simplified method	
R1	650,19
r	0,871
M1	1120,0
t1	140,00
G1	0,001257111
R2	749,59
t2	116,83
G2	0,002959539
Residuo	9,14236E-07
Gbp	2,89
Wl	7,98

4.4 Análise de Sensibilidade

De modo a obter a relevância estatística dos resultados calculados neste Excel, existe uma página onde se calcula uma análise de sensibilidade dos resultados obtidos. Usando as fórmulas 4.53 a 4.57, foram calculados os erros/desvios do cálculo do WI como a soma de todos os erros/desvios dos vários constituintes usados no seu cálculo.

$$WI = \frac{C}{10 \times MOG^{exp1} \times Ub^{exp2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{\phi_{80}^P}} - \frac{1}{\sqrt{\phi_{80}^A}} \right)}, \quad (C = 49.1, exp1 = 0.23, exp2 = 0.82) \quad 4.53$$

Derivando a fórmula 4.53, acima, em ordem a cada uma das variáveis, obtém-se a relevância de cada termo da expressão no seu resultado e, assim, o impacto que o erro associado ao seu cálculo terá no resultado final.

$$\frac{\partial WI}{\partial MOG} = - \frac{C \times exp1}{10 \times MOG^{exp1} \times Ub^{exp2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{\phi_{80}^P}} - \frac{1}{\sqrt{\phi_{80}^A}} \right) MOG} \quad 4.54$$

$$\frac{\partial WI}{\partial Ub} = - \frac{C \times exp2}{10 \times MOG^{exp1} \times Ub^{exp2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{\phi_{80}^P}} - \frac{1}{\sqrt{\phi_{80}^A}} \right) \times Ub} \quad 4.55$$

$$\frac{\partial WI}{\partial \phi_{80}^P} = \frac{C}{20 \times MOG^{exp1} \times Ub^{exp2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{\phi_{80}^P}} - \frac{1}{\sqrt{\phi_{80}^A}} \right)^2 \times (\phi_{80}^P)^{3/2}} \quad 4.56$$

$$\frac{\partial WI}{\partial \phi_{80}^A} = - \frac{C}{20 \times MOG^{exp1} \times Ub^{exp2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{\phi_{80}^P}} - \frac{1}{\sqrt{\phi_{80}^A}} \right)^2 \times (\phi_{80}^A)^{3/2}} \quad 4.57$$

Nestes cálculos é essencial ter o cuidado de não baralhar as abreviaturas. Como estamos a calcular o BWi, há que usar o Gbp em vez do Ub calculado experimentalmente.

Após calculado o impacto de cada termo, foi necessário calcular o erro associado a cada um. O δ neste caso tem uma conotação de desvio padrão σ , pois escolheu-se usar o desvio padrão como valor do erro associado ao cálculo de cada variável.

$$\delta WI \cong \frac{\partial WI}{\partial MOG} \delta MOG + \frac{\partial WI}{\partial Ub} \delta Ub + \frac{\partial WI}{\partial \phi_{80}^P} \delta \phi_{80}^P + \frac{\partial WI}{\partial \phi_{80}^A} \delta \phi_{80}^A \quad 4.58$$

$$m_{\delta MOG} = 0, m_{\delta Ub} = 0, m_{\delta \phi_{80}^P} = 0, m_{\delta \phi_{80}^A} = 0 \Rightarrow$$

$$m_{\delta WI} = \left(\frac{\partial WI}{\partial MOG} \right) m_{\delta MOG} + \left(\frac{\partial WI}{\partial Ub} \right)^2 m_{\delta Ub} + \left(\frac{\partial WI}{\partial \phi_{80}^P} \right)^2 m_{\delta \phi_{80}^P} + \left(\frac{\partial WI}{\partial \phi_{80}^A} \right)^2 m_{\delta \phi_{80}^A} = 0 \quad 4.59$$

$$\sigma_{\delta WI}^2 = \left(\frac{\partial WI}{\partial MOG} \right)^2 \sigma_{\delta MOG}^2 + \left(\frac{\partial WI}{\partial Ub} \right)^2 \sigma_{\delta Ub}^2 + \left(\frac{\partial WI}{\partial \phi_{80}^P} \right)^2 \sigma_{\delta \phi_{80}^P}^2 + \left(\frac{\partial WI}{\partial \phi_{80}^A} \right)^2 \sigma_{\delta \phi_{80}^A}^2 \quad 4.60$$

Por fim, os resultados da análise de sensibilidade são apresentados sob a forma de um intervalo de confiança de 95%, presente na tabela 13, abaixo.

Tabela 13 - Resultados do teste experimental e simulado com o respectivo intervalo de confiança

Teste de Bond Experimental		Teste de Bond Simulado	
Wi	7,39	Wi	8,25
WI - 2 σ =	6,34	WI - 2 σ =	6,89
WI + 2 σ =	8,45	WI + 2 σ =	9,61
IC _(95%) =	[6,34 : 8,45]	IC _(95%) =	[6,89 : 9,61]

4.5 Validação da metodologia, por comparação dos resultados com metodologia alternativa

Escolhemos o método de Kapur como metodologia alternativa de modo a termos um método conhecido e fiável para servir de comparação. Em ambas as situações o valor do método alternativo pertence ao intervalo de confiança a 95% do valor obtido pelo programa em análise, tabela 14.

Tabela 14 - Comparação do método em análise com o alternativo

Teste de Bond Experimental		Teste de Bond Simulado	
Kapur	6,73	Kapur	7,98
Wi	7,39	Wi	8,25
IC(95%) =	[6,34 : 8,45]	IC(95%) =	[6,89 : 9,61]

Observou-se que o intervalo de confiança do ensaio de Bond experimental compreende todos os valores obtidos, o que demonstra que o ensaio de Bond tem grande probabilidade de ter reproduzido valores fiáveis e repetíveis. Isto é importante notar devido à grande sensibilidade deste método laboratorial a erros de operador.

Capítulo 5 – Conclusões e Trabalhos Futuros

Neste trabalho foi possível mostrar que o programa em análise é de facto uma opção válida para o cálculo do índice de energia de Bond, mostrando que para a amostra em estudo o Excel/método alternativo em análise fornece um bom resultado. Este Excel tem claras vantagens em termos de rapidez de cálculo, evitando um demorado e cuidadoso ensaio de Bond, bem como no que respeita ao estudo do erro associado ao cálculo, sendo que o erro neste caso é mais fácil de calcular e mais certo, pois os erros experimentais não são mesuráveis e é requerida outra forma de validação, através de métodos alternativos ou repetições dos ensaios. Também é claro que os ensaios cinéticos são mais simples e menos susceptíveis a erros que o ensaio de Bond o que nos dá uma maior confiança nos valores resultantes.

O estudo do erro, quando feito, é normalmente feita através da diferença relativa dos mínimos quadrados de diversos ensaios de Bond com os resultados dos algoritmos de simulação, estes valores são para muitos ensaios e muitas amostras e estimam um erro médio, mas nunca o erro de cada cálculo de cada simulação, essa é a clara novidade deste método deste procedimento, deste 'Excel' onde para cada análise temos um intervalo de confiança.

Mostrámos também que o modelo AKL para a amostra em estudo resulta num modelo matemático melhor que o modelo de RPK, sendo que o programa pode usar ambos.

Também se deve notar, que pelo facto de ter sido utilizado um moinho de menores dimensões que o moinho de Bond, a expressão do erro é claramente maior e conseqüentemente a estabilização do ensaio é mais difícil e errática.

Trabalhos Futuros

- Usar este programa e método de avaliação noutras amostras, de forma a validar a sua competência para o cálculo do W_i ;
- Recorrendo a um moinho de Denver, limitar a duração máxima dos ensaios cinéticos a 2 min;
- Avaliar o impacto na performance da modelação da adição de mais ensaios cinéticos (com duração até 2 min);
- Prosseguir a comparação entre os modelos AKL e R.P. King utilizados, de forma a averiguar se de facto um é melhor que o outro, ou se isso varia com o tipo de rocha e/ou com condições laboratoriais.

Bibliografia:

- Ahmadi, R., & Shahsavari, S. (2009). Procedure for determination of ball Bond work index in the commercial operations. *Minerals Engineering*, 22(1), 104–106. <https://doi.org/10.1016/j.mineng.2008.04.008>
- Aksani, B., & Sönmez, B. (2000). Simulation of bond grindability test by using cumulative based kinetic model. *Minerals Engineering*, 13(6), 673–677. [https://doi.org/10.1016/S0892-6875\(00\)00050-9](https://doi.org/10.1016/S0892-6875(00)00050-9)
- Andreasen, A. H. M., & Jenson, I. H. (1955). *Berichte der Deutschen Keramischen Gesellschaft* (Vol. 32, p. 232).
- Armstrong, D. G. (1986). (Received November 9, 1984; revised and accepted May 30, 1985). 16, 195–208.
- Austin, L. G. (1973). A commentary on the Kick, Bond and Rittinger laws of grinding. *Powder Technology*, 7(6), 315–317. [https://doi.org/10.1016/0032-5910\(73\)80042-7](https://doi.org/10.1016/0032-5910(73)80042-7)
- Austin, L. G., & Bhatia, V. K. (1972). Experimental methods for grinding studies in laboratory mills. *Powder Technology*, 5(5), 261–266. [https://doi.org/10.1016/0032-5910\(72\)80029-9](https://doi.org/10.1016/0032-5910(72)80029-9)
- Austin, L. G., & Brame, K. (1983). A comparison of the Bond method for sizing wet tumbling ball mills with a size-mass balance simulation model. *Powder Technology*, 34(2), 261–274. [https://doi.org/10.1016/0032-5910\(83\)87059-4](https://doi.org/10.1016/0032-5910(83)87059-4)
- Austin, L. G., & Klimpel, R. R. (1964). The Theory of Grinding Operations. *Industrial and Engineering Chemistry*, 56(11), 18–29. <https://doi.org/10.1021/ie50659a004>
- Austin, L. G., Klimpel, R. R., & Luckie, P. T. (1984). *Process Engineering of Size Reduction - Ball Milling*. SME.
- Bond, F. C. (1949). Standard grindability test tabulated. *Transactions of the American Institution of Mining Engineers*, 183, 313–329.
- Bond, F. C. (1952). The Third Theory of Comminution. *AIME*, 193, 484–494.
- Bond, F. C. (1960). Crushing and Grinding Calculations. *British Chemical Engineering*, 6, 378–391.
- Bond, F. C., & Maxson, W. L. (1943). Standard grindability tests and calculations. *Transactions of the Society of Mining Engineers of AIME*, 153, 362–372.
- Broadbent, S. R., & Callcott, T. G. (1956). A matrix analysis of processes involving particle assemblies. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 249(960), 99–123. <https://doi.org/10.1098/rsta.1956.0016>
- Broadbent, S. R., & Callcott, T. G. (1957). No Title. *Journal of the Institute of Fuel*, 29, 524–528.
- Brown, R. L. (1941). No Title. *Journal of the Institute of Fuel*, 14, 129.
- Charles, R. J. (1957). Energy-size reduction relationships in comminution. *Trans. Am. Inst. Min. Eng.*, 208, 80–88.
- Deniz, V. (2004). Investigation of breakage behaviour of two different pumice stones. *The European Journal of Material Processing and Environmental Protection*, 4(2), 162–167.
- Deniz, V., Akkurt, Y., & Umucu, Y. (2005). A New Model on Breakage Behaviour of A Laboratory Impact Mill. *Proceedings of the 19th International Mining Congress of Turkey, Izmir.*, 229–232.

- Deniz, V., & Ozdag, H. (2003). A new approach to bond grindability and work index: Dynamic elastic parameters. *Minerals Engineering*, 16(3), 211–217. [https://doi.org/10.1016/S0892-6875\(02\)00318-7](https://doi.org/10.1016/S0892-6875(02)00318-7)
- Epstein, B. (1948). Logarithmico-Normal Distribution in Breakage of Solids. *Industrial & Engineering Chemistry*, 40(12), 2289–2291. <https://doi.org/10.1021/ie50468a014>
- Gharehgheshlagh, H. H. (2016). Kinetic grinding test approach to estimate the ball mill work index. *Physicochemical Problems of Mineral Processing*, 52(1), 342–352. <https://doi.org/10.5277/ppmp160129>
- Griffith, A. A. (1921). The phenomena of rapture and flow in solids. In *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* (Vol. 221, pp. 163–198). <http://mbarkey.eng.ua.edu/courses/AEM644/Griffith1921fracture.pdf>
- Hartman, H. L. (2002). *Introductory Mining Engineering* (W. & Sons (ed.); 2nd Editio).
- Herbst, J. A., & Fuerstenau, D. W. (1980). Scale-Up Procedure for Continuous Grinding Mill Design Using Population Balance Models. *International Journal of Mineral Processing*, 7, 1–31.
- Horst, W. E., & Bassarear, J. H. (1976). Use of simplified ore grindability technique to evaluate plant performance. *AIME Transaction*, 260, 348–351.
- Hukki, R. T. (1961). Minerals Beneficiation: Proposal for a Solomonian Settlement Between The Theories of von Rittinger, Kick and Bond. *AIME Transactions*, 220, 403–408.
- Ipek, H., Ucbas, Y., & Hosten, C. (2005). The bond work index of mixtures of ceramic raw materials. *Minerals Engineering*, 18(9), 981–983. <https://doi.org/10.1016/j.mineng.2004.12.014>
- Jauregui, R. . (1982). Simplified Bond Work Index determination. *Encontro Nacional de Tratamento de Minérios*, 2, 358–367.
- Kapur, P. C. (1970). ANALYSIS OF THE BOND GRINDABILITY TEST. *Transactions of the Institution of Mining and Metallurgy, Section C: Mineral Processing and Extractive Metallurgy*, 79(763), 103–108.
- Karra, V. K. (1981). SIMULATION OF THE BOND GRINDABILITY TEST. *CIM Bulletin*, 74(827), 195–199.
- Kick, F. (1883). No Title. *Dinglers Polytechnisches Journal*, 247, 1–5.
- King, R. P. (2001). *Modeling and Simulation of Mineral Processing Systems* (Elsevier (ed.); 1 st Editi). Butterworth-Heinemann.
- Magdalinović, N. (1989). A procedure for rapid determination of the Bond work index. *International Journal of Mineral Processing*, 27(1–2), 125–132. [https://doi.org/10.1016/0301-7516\(89\)90010-0](https://doi.org/10.1016/0301-7516(89)90010-0)
- Magdalinovic, N., Trumic, M., Trumic, G., Magdalinovic, S., & Trumic, M. (2012). Determination of the Bond work index on samples of non-standard size. *International Journal of Mineral Processing*, 114–117, 48–50. <https://doi.org/10.1016/j.minpro.2012.10.002>
- Michaud, L. D. (2015). *Rock Crusher History*. <https://www.911metallurgist.com/blog/rock-crusher-history>
- Narayanan, S. S., & Whiten, W. J. (1988). Determination of comminution characteristics from single particle breakage tests and its application to ball mill scale-up. *Trans. Inst. Min. Metall. (Section C)*, 97, 115–124.

- Nematollahi, H. (1994). New size laboratory ball mill for Bond work index determination. *Minerals Engineering*, 352–353.
- Pickering, W. H. (1913). A Simple Method of Determining the Time. *Scientific American*, 76(1976supp), 320–320. <https://doi.org/10.1038/scientificamerican11151913-320asupp>
- Pryor, E. J. (1965). Dry Grinding. In *Mineral Processing* (pp. 127–139). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-010-2941-4_7
- Reid, K. J. (1965). A solution to the batch grinding equation. *Chemical Engineering Science*, 20(11), 953–963. [https://doi.org/10.1016/0009-2509\(65\)80093-8](https://doi.org/10.1016/0009-2509(65)80093-8)
- Rexnord Inc. Process Machinery Division. (1976). Grinding Mills. In *Nordberg process machinery reference manual*.
- Rittinger, P. R. (1867). *LEHRBUCH DER AUFBEREITUNGSKUNDE IN IHRER NEUESTEN ENTWICKLUNG UND AUSBILDUNG SYSTEMATISCH DARGESTELLT VON*.
- Rose, H. E. (1967). A Comprehensive Theory of the Comminution Process. *Symp. on Comminution. Dechema Monographien 57*, 27–62.
- Rowland, C. A. (1998). Using the Bond work index to measure operating comminution efficiency. *Minerals and Metallurgical Processing*, 15(4), 32–36. <https://doi.org/10.1007/bf03403155>
- Rowland, C. A., & Kjos, D. M. (1978). Rod and Ball Mills. *AIME, In Minera*(Ed. Mular and Bhappu).
- Sedlatschek, K., & Bass, L. (1953). No Title. *Powder Metallurgy Bulletin*, 6, 148.
- Smith, R. W., & Lee, K. H. (1968). A Comparison of Data From Bond Type Simulated Closed-Circuit and Batch Type Grindability Tests. *Powder Technology*, 146(3), 193–199.
- Tarasiewicz, S., & Radziszewski, P. (1990). : *Batch Grinding Equation and Breakage Energy [I. 25*.
- Umucu, Y., & Deniz, V. (2014). The Evaluation of Grinding Behaviors of Quartz and Feldspar. *Tojsat*, 4(1), 60–67.
- Walker, W. H., Lewis, W. K., Gilliland, E. R., & McAdams, W. H. (1937). *Principles of Chemical Engineering* (McGraw-Hill (ed.)).
- Williams, O., Eastwick, C., Kingman, S., Giddings, D., Lormor, S., & Lester, E. (2015). Investigation into the applicability of Bond Work Index (BWI) and Hardgrove Grindability Index (HGI) tests for several biomasses compared to Colombian La Loma coal. *Fuel*, 158(May), 379–387. <https://doi.org/10.1016/j.fuel.2015.05.027>
- Yalcin, T., Idusuyi, E., Johnson, R., & Sturgess, C. (2004). A simulation study of sulphur grindability in a batch ball mill. *Powder Technology*, 146(3), 193–199. <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2004.09.030>
- Yap, R. F., Sepulveda, J. L., & Jauregui, R. (1982). Determination of the Bond work index using an ordinary laboratory batch ball mill: Designing and Installation of comminution circuits. *AIME*, 176–203.

Anexos

Anexo – 1 – ‘Data and modal adjustment’

EXPERIMENTAL DATA					
Particle Size (µm)	Grinding Times t (min.)	0,5	1	2	4
	Feed Composition	PM(0,5)	PM(1)	PM(2)	PM(4)
3550	4,604	2,203	0,967	0,258	0,037
2800	17,506	10,421	6,379	2,199	0,201
2000	18,030	12,116	8,150	2,868	0,220
1400	9,955	8,124	6,361	2,186	0,142
1000	14,400	14,450	12,434	6,245	0,382
710	7,648	9,348	9,923	7,544	0,555
500	5,450	7,872	9,248	9,935	1,767
355	4,145	6,517	8,497	10,290	5,255
250	2,450	3,603	4,981	7,016	7,990
180	2,891	4,732	5,977	9,285	14,163
125	1,350	2,233	3,166	4,533	7,306
90	1,705	2,452	3,511	4,906	7,999
63	1,638	3,824	3,931	5,590	9,227
45	8,229	12,105	16,476	27,145	44,756
Total	100,000	100,000	100,000	100,000	100,000

Warning: Only change cells with this

green background

1

MATHEMATICAL MODELLING				
Simulated Product Size Distributions P(t), t=0.5,1,2,4 min.				
P(0,5)	P(1)	P(2)	P(4)	
1,852	0,745	0,121	0,003	
8,790	4,351	1,035	0,054	
12,471	8,112	3,087	0,362	
9,355	7,710	4,344	0,996	
13,284	11,409	7,448	2,492	
9,373	9,679	8,266	4,199	
7,679	8,741	8,777	5,965	
6,489	7,935	8,987	7,610	
4,563	6,075	7,737	7,910	
4,838	6,341	8,268	9,309	
2,912	4,208	6,110	7,918	
3,073	4,252	6,105	8,246	
2,687	3,621	5,175	7,250	
12,634	16,821	24,541	37,685	
100,000	100,000	100,000	100,000	

$P(t) = \Phi(t) * \text{FeedComposition}, t=1, 2, 4, 8. \text{ min.}$

Matrix of errors = P(t)-PM(t), t= 0.5,1,2,4 min.				
t=0,5	t=1	t=2	t=4	
2,36E-01	2,26E-01	2,71E-01	1,75E-01	
5,05E-01	8,03E-01	7,85E-01	3,26E-01	
-1,02E-01	1,30E-02	-1,29E-01	-3,03E-01	
-4,32E-01	-5,35E-01	-1,46E+00	-2,26E+00	
3,07E-01	2,91E-01	-4,81E-01	-3,41E+00	
-8,24E-03	7,73E-02	-2,63E-01	-4,89E+00	
6,88E-02	1,67E-01	3,68E-01	-3,16E+00	
1,11E-02	1,93E-01	4,06E-01	-1,03E+00	
-5,06E-01	-4,90E-01	-2,72E-01	2,82E-02	
-4,87E-02	-1,49E-01	3,34E-01	1,29E+00	
-4,55E-01	-5,85E-01	-7,41E-01	-2,26E-01	
-3,96E-01	-3,95E-01	-5,41E-01	-8,72E-02	
5,82E-01	1,56E-01	1,75E-01	6,51E-01	
-1,52E-01	-8,50E-02	5,00E-01	1,06E+00	
Average	-2,79E-02	-2,24E-02	-7,49E-02	

Objective function = 8,266

Objective function type

- SSR
- WSSR
- SARR

SSR = (Single) Sum of Squared Residues
WSSR = Weighted Sum of Squared Residues
SARR = Sum of Absolute Relative Residues

2

Parameters of the kinetic model for batch ball milling								
S ₁	α	μ	Λ	φ	γ	β	δ	
0,70	0,75	0,00	0,00	0,80	0,70	6,00	0,34	
0,20	0,75	0,00	0,00	0,20	0,70	2,30	0,00	
5,00	2,00	0,00	0,00	0,80	2,00	6,00	0,34	
0,40	0,75	1,40	2,00	0,20	0,70	2,30	0,00	
5,00	2,00	4,00	4,00	0,80	2,00	6,00	0,34	

Adjust model parameters

d _{max} = INF	mm
General constraints	
γ - β ≤ 0	-5,300
Λ - α > 0	0,000

Solver info 0 Solver found a solution. All constraints and optimality conditions are satisfied.

3

Standard deviations of parameter estimates								
S ₁	α	μ	Λ	φ	γ	β	δ	
1,24E-01	1,99E-01	0,00E+00	0,00E+00	1,00E+00	1,17E-01	7,38E+01	2,51E+00	

Compute Standard Deviations

No. of tests 3

1

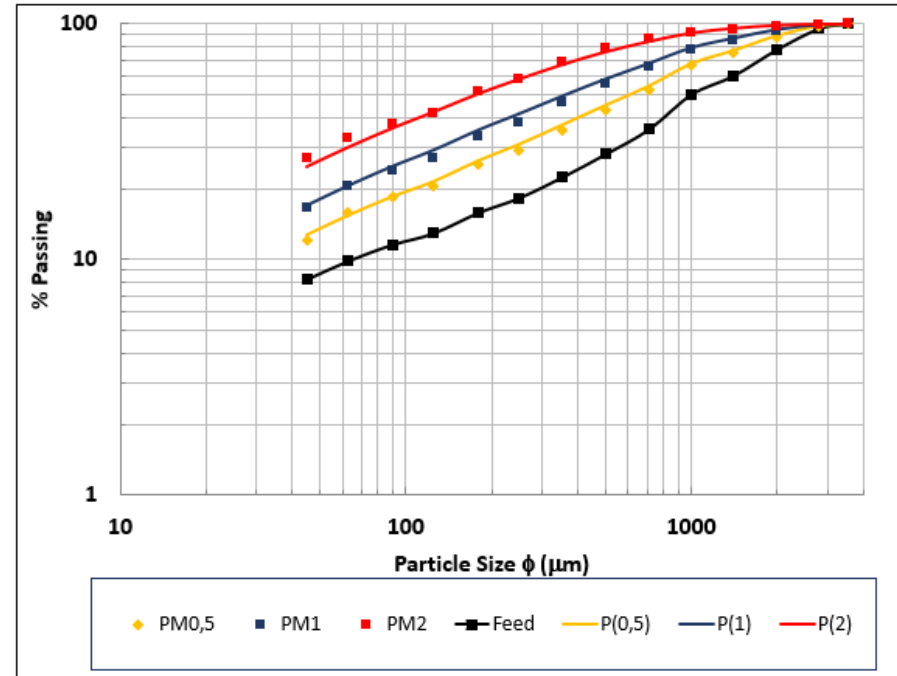
Set No. Of tests to 3 to adjust the model parameters considering only the results for grinding times of 1, 2 and 4 minutes.

Anexo – 2 – ‘Model validation’

Cumulative Size Distributions

	Measured size distributions			
	Feed	PM(0,5)	PM(1)	PM(2)
3550	100,000	100,000	100,000	100,000
2800	95,523	97,797	99,033	99,740
2000	78,007	87,376	92,654	97,528
1400	60,127	75,260	84,505	94,643
1000	50,209	67,136	78,143	92,444
710	35,699	52,686	65,709	86,162
500	28,002	43,339	53,787	78,573
355	22,442	35,466	46,539	68,579
250	18,291	28,949	38,042	58,317
180	15,837	25,346	33,061	51,320
125	12,941	20,614	27,084	42,060
90	11,590	18,382	23,918	37,540
63	9,882	15,930	20,407	32,646
45	8,241	12,105	16,476	27,072

Simulated size distributions		
P(0,5)	P(1)	P(2)
100,000	100,000	100,000
98,231	99,301	99,891
89,573	95,081	98,918
77,291	87,167	95,971
68,006	79,567	91,761
54,695	68,210	84,450
45,279	58,526	76,265
37,486	49,700	67,488
30,956	41,721	58,494
26,355	35,595	50,721
21,480	29,201	42,400
18,538	24,946	36,232
15,438	20,650	30,065
12,730	16,992	24,836



Anexo – 3 – ‘Residues I’

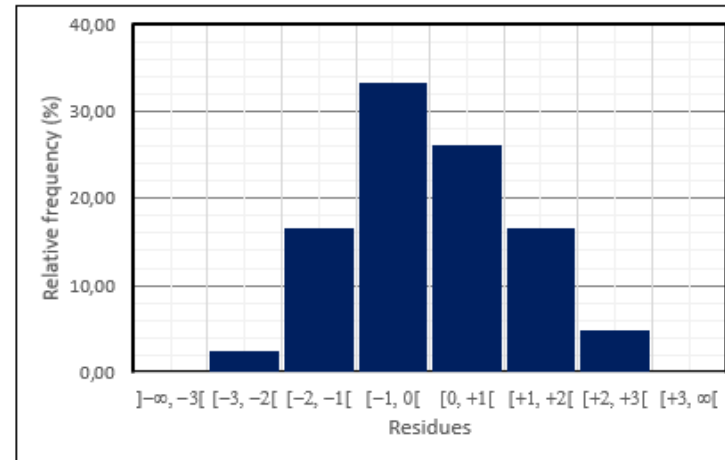
Goodness of Fit (Chi-square test)

ϕ (μm)	RESIDUES		
3550	0,434	0,268	0,151
2800	1,763	2,159	1,239
2000	-0,165	0,236	-0,062
1400	-1,161	-1,239	-2,011
1000	1,139	1,077	-1,029
710	-0,069	0,239	-0,596
500	0,080	0,422	1,216
355	-0,012	0,517	1,269
250	-0,998	-1,145	-0,777
180	-0,143	-0,417	0,939
125	-0,709	-1,088	-1,648
90	-0,648	-0,785	-1,273
63	1,116	0,273	0,345
45	-0,625	-0,516	2,236

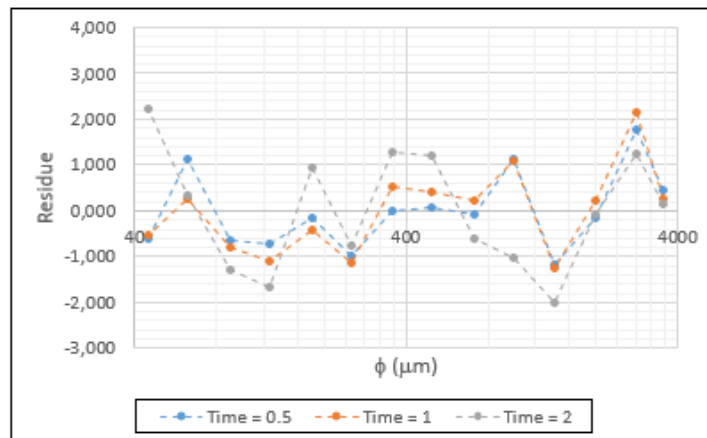
Mean 0,000
s 1,015

Histogram data			
Bin	NObs	%	NExp
$]-\infty, -3[$	0	0,00	0,06
$[-3, -2[$	1	2,38	0,90
$[-2, -1[$	7	16,67	5,71
$[-1, 0[$	14	33,33	14,34
$[0, +1[$	11	26,19	14,34
$[+1, +2[$	7	16,67	5,71
$[+2, +3[$	2	4,76	0,90
$[+3, \infty[$	0	0,00	0,06
Total	42	100,00	42,00

Goodness of fit test - Chi-square test:
 χ^2 2,84
 p -value 8,99E-01
 χ^2_{crit} 14,07



Model validation: Plot of Residues versus particle size ϕ



Update figure

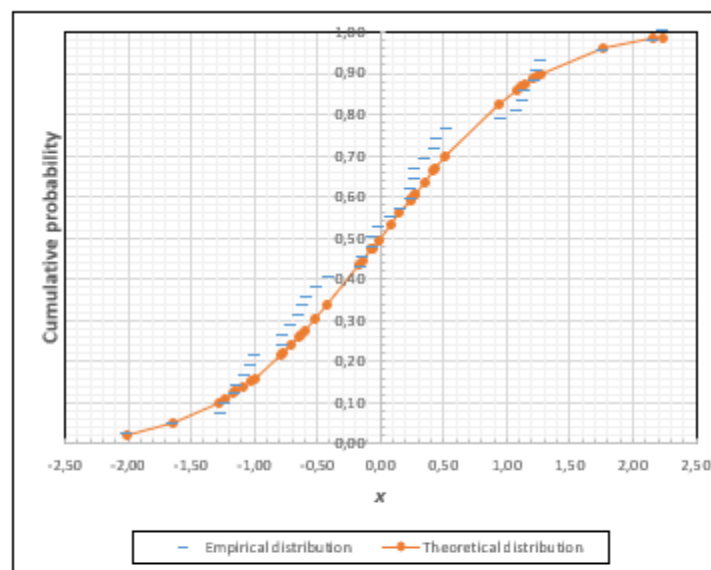
A.T.T.

Anexo – 4 – ‘Residues II’

mean	0,0000	42	max(D)	lambda	P(lambda)
std	1,0148		0,0814	0,5390	0,9334

Sign tests

	Residues		
n1 (< 0)	9	6	7
n2 (> 0)	5	8	7
n=n1+n2	14	14	14
min(n1,n2)	5	6	7
ρ -value	0,21	0,40	0,60



Theoretical distribution: Normal(mean = 0.00, std = 0.01)

mean = 0
std = 1

Anexo – 6 – ‘Simulated Bond Test’

Simulation of Bond test

MillFeed	1120,008 g	Feed undersize	12,94 %
Mesh_of_grinding	125 μ m	New undersize	278,59 g
Steady State New Feed	320,00 g		

Initial time (min)	2 min.	Cycle	5
Tolerance	1 g	Convergence	Yes

Press here to Start

Pres Co

Oversize 799,36 g

Oversize (g)	Oversize (%)	Size Composition of New Feed	Cumulative mill feed (%)	Size Composition of Mill Feed (%)	Mill Feed (g)	Composition of Mill Product (%)	Oversize (%)	Oversize (g)	Undersize (%)	Undersize (g)
1,01	0,13	3550	4,477	0,000	1,37	15,36	0,089	0,12	1,00	0,00
7,77	0,97	2800	17,516	4,477	5,71	63,94	0,683	0,96	7,65	0,00
21,03	2,63	2000	17,881	21,993	7,00	78,37	1,829	2,56	20,48	0,00
30,63	3,83	1400	9,918	39,873	5,57	62,43	2,609	3,65	29,22	0,00
59,58	7,45	1000	14,511	49,791	9,47	106,10	5,000	7,00	55,99	0,00
81,86	10,24	710	7,697	64,301	9,51	106,54	6,822	9,55	76,40	0,00
110,62	13,84	500	5,560	71,996	11,47	128,45	9,393	13,15	105,20	0,00
142,00	17,76	355	4,152	77,556	13,87	155,31	12,504	17,50	140,04	0,00
152,85	19,12	250	2,454	81,709	14,35	160,72	14,099	19,74	157,31	0,00
187,83	23,50	180	2,895	84,163	17,60	197,11	18,033	25,24	201,97	0,00
3,87	0,48	125	1,352	87,059	0,73	8,21	5,140	0,48	3,87	16,79
0,29	0,04	90	1,707	88,410	0,51	5,77	4,566	0,04	0,29	15,89
0,02	0,00	63	1,641	90,118	0,47	5,28	3,629	0,00	0,02	12,70
0,00	0,00	45	8,241	91,759	2,36	26,43	15,605	0,00	0,00	54,63
799,36	100,00	0		100,000	100,00	1120,01	100,000	100,00	800,05	100,00

Cycle summary			
U (New undersize) (g)	U _l (rpm)	New Time (min)	N (rpm)
278,46	2,70	1,47	103

[New Undersize(g)- Steady State New underize(g)]=

ϕ_{90}^*	2091,01 μ m
ϕ_{90}^P	84,54 μ m
k_w	8,24 kWh/t

Details of stream compositions

